Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 11. Tutorium

Vorschlag 1.
Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Dualbasis B^* von $B = (u_1, u_2, u_3)$.

Vorschlag 2.
Seien $B = (v_1, v_2, v_3)$ bzw. $C = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ geordnete Basen der reellen Vektorräume V und W. Durch

$$\Phi(v_1) := w_1 + w_3 - w_4, \qquad \Phi(v_2) := w_2 + w_3 + w_4, \qquad \Phi(v_3) := w_1 + w_2 + 2w_3$$

wird eine lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ festgelegt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B und C sowie Kern Φ und Bild Φ.

Vorschlag 3.
Es seien

$$\tilde{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$ und B die Standardbasis. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich der Basen

(a) B und B.

(b) $\tilde{B}$ und B.

(c) B und $\tilde{B}$.

(d) $\tilde{B}$ und $\tilde{B}$.

Vorschlag 4.
Es seien $\alpha = 2\pi/n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man beweise $D(\alpha)^n = S^2 = E_2$ und $S^{-1}D(\alpha)S = D(\alpha)^{-1}$.

(b) Man zeige, dass die Menge

$$\mathcal{D} := \{D(\alpha)^k, S \cdot D(\alpha)^k \mid k = 0, \dots, n-1\}$$

eine Gruppe mit $|\mathcal{D}| = 2n$ ist.

Vorschlag 5.
Es seien $W \subset \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 2$ und $\Phi : W \to W$ die Abbildung $\Phi(p)(x) = p(x+1)$. Zeigen Sie, dass Φ linear ist und geben Sie die Abbildungsmatrix von Φ bzgl. der Basis $B = \{1, X, X^2\}$ an.