FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 12. Tutorium

Vorschlag 1.
Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ bzw. im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $x_1 = (1, 2, 4)$, $x_2 = (0, 2, 4)$, $x_3 = (1, 2, 3)$ und $y_1 = (1, 0, 3, -6, 11)$, $y_2 = (3, -4, -11, -6, 10)$, $y_3 = (3, 1, -8, 3, 3)$.

(a) Man zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ gibt mit $\Phi(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2, 3$.

(b) Man bestimme die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis (x_1, x_2, x_3) und der Standardbasis des $\mathbb{R}^5$.

(c) Man bestimme die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ und des $\mathbb{R}^5$.

Vorschlag 2.
Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a-1 & -1 \\ a+2 & 0 & 2 & a+2 \\ a+2 & 0 & a+1 & 3 \\ -1 & a-2 & a-1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

äquivalent?

Vorschlag 3.
Sei V ein reeller Vektorraum und $B = \{b_1, ..., b_3\}$ eine Basis von V. Ferner sei $C = \{c_1, ..., c_3\}$ gegeben durch

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & = & b_1 & + & b_2 & + & b_3 \\ c_2 & = & & & b_2 & - & b_3 \\ c_3 & = & b_1 & - & b_2 & & \end{array}$$

Man zeige, dass C eine Basis von V ist und bestimme Matrizen T_B^C und T_C^B, die den Basiswechsel von B nach C bzw. von C nach B beschreiben. (Dabei ist $T_B^C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diejenige Matrix, die die Koordinatenvektoren von Vektoren $v \in V$ bzgl. B in deren Koordinatenvektoren bzgl. C überführt.)

Vorschlag 4.
Gegeben seien die Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Fehlstandszahlen von π_1 und $\pi_1 \circ \pi_2$ und gebe π_1 als Verkettung von Transpositionen an.