

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

2. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Wir schreiben abkürzend $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n -mal) für die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen. Welche der folgenden Teilmengen definieren eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $A := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 - y_1 = x_2 - y_2\}$

(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$

(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{R}_{>0}\}$ wobei $\mathbb{R}_{>0} := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$.

(d) Beschreiben Sie in den Fällen, in denen eine Äquivalenzrelation vorliegt, die Äquivalenzklassen geometrisch.

Aufgabe 2.

Für $i \in \{1, \dots, 6\}$ seien Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x, & f_2(x) &:= 1 - x, & f_3(x) &:= \frac{1}{x}, \\ f_4(x) &:= \frac{1}{1 - x}, & f_5(x) &:= \frac{x}{x - 1}, & f_6(x) &:= \frac{x - 1}{x}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Komposition \circ von Abbildungen auf der Menge $A := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ eine Verknüpfung definiert, indem Sie eine Verknüpfungstafel aufstellen. Ist (A, \circ) eine Gruppe?

Aufgabe 3.

Es seien (G, \circ) eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und $x \in G$ ein festes Element. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$ mit $x^k = e$. (k nennt man die *Ordnung* von x .)

(b) Ist k die Ordnung von x , so gilt: $B = \{x, x^2, \dots, x^k\}$ ist eine Untergruppe von G , die abelsch ist und k Elemente besitzt.

Zusatzaufgabe (ohne Abgabe, ohne Korrektur)

Zeigen Sie: Sind (A, \circ) und $(B, *)$ Gruppen, so ist auch $(A \times B, \star)$ mit der Verknüpfung

$$(x_1, y_1) \star (x_2, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 * y_2) \quad (x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in B)$$

eine Gruppe.

Abgabe bis Montag, den 08. November 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, Ihrer **Fachrichtung** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums. Achten Sie darauf, die bearbeiteten Übungsblätter genau in das Ihrer Tutorengruppe zugeordnete Fach einzuwerfen.