Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

3. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Es seien $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe, $H \subset G$ eine beliebige Untergruppe und $x \in G$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\jmath_x : G \to G$, $g \mapsto x \circ g \circ x^{-1}$ ist ein Automorphismus von G.

(b) Die Menge

$$x \circ H \circ x^{-1} := \{x \circ g \circ x^{-1} \mid g \in H\}$$

ist eine Untergruppe von G. Es gilt ferner $|H| = |x \circ H \circ x^{-1}|$.

(c) Ist $|H| = k$ und $|G| = 2k$, so ist H ein Normalteiler in G.

Aufgabe 2
Es seien S_8 die Permutationsgruppe der Menge $\{1, 2, \dots, 8\}$ (d.h., die Menge aller Permutationen, zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenverknüpfung) und $\pi, \pi' \in S_8$ die Permutationen

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \pi' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 5 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die obige Notation ist wie folgt zu verstehen: $\pi(1) = 5$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 7$, ... , $\pi(8) = 4$.

(a) Berechnen Sie $\pi \circ \pi'$ und $\pi' \circ \pi$ sowie das inverse Element von π'.

(b) Gibt es Permutationen $\sigma \in S_8$, die $\pi' \circ \sigma = \sigma \circ \pi$ erfüllen?

(c) Berechnen Sie π^{2010}.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $A := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung

$$x \circ y := xy + x + y \qquad (x, y \in A)$$

zu einer abelschen Gruppe wird.

(b) Lösen Sie in $(A, \circ)$ die Gleichung

$$3 \circ x \circ x = 15.$$

Aufgabe 4
Welche der folgenden Abbildungen sind Homo-, Iso- bzw. Automorphismen? (Die Addition auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist hier komponentenweise definiert, wie in der Zusatzaufgabe von Blatt 2.)

(a) $\psi_1 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $\psi_1(x, y) = 3x - 4y$.

(b) $\psi_2 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $\psi_2(x, y) = 2 + 3x - 4y$.

(c) $\psi_3 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}^2, +)$, $\psi_3(x, y) = (y, y)$.

(d) $\psi_4 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}^2, +)$, $\psi_4(x, y) = (2x + y, x - y)$.

Bestimmen Sie gegebenenfalls jeweils den Kern von ψ_j.

Abgabe bis Montag, den 15. November 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.