

## Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

### 4. Übungsblatt

#### Aufgabe 1

Es seien  $(G, \circ)$  eine endliche Gruppe mit neutralem Element  $e$  und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Zeigen Sie:

- $\{Hg \mid g \in G\}$  ist eine Partition von  $G$ . Dabei ist  $Hg := \{h \circ g \mid h \in H\}$ .
- $|H|$  teilt  $|G|$ .
- Für alle  $g \in G$  gilt:  $g^{|G|} = e$ .
- Für  $|G| \geq 2$  gilt:  $|G|$  ist genau dann eine Primzahl, wenn  $\{e\}$  und  $G$  die einzigen Untergruppen von  $G$  sind.

#### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Menge

$$K := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation in  $\mathbb{R}$  ein Körper und dass  $K$  eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist.

#### Aufgabe 3

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Zeigen Sie:

- Die Charakteristik von  $\mathbb{K}$  ist entweder 0 oder eine Primzahl.
- Ist die Charakteristik von  $\mathbb{K}$  eine Primzahl  $p$ , so gibt es einen eindeutig bestimmten Körperhomomorphismus von  $\mathbb{Z}_p$  nach  $\mathbb{K}$ .
- (ohne Abgabe, ohne Korrektur) Ist die Charakteristik 0, so gibt es einen eindeutig bestimmten Körperhomomorphismus von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{K}$ .

#### Aufgabe 4

Die meisten Bücher sind heutzutage mit einer zehnstelligen Zahl, der ISBN-Nummer, gekennzeichnet,

$$z_1 - z_2z_3z_4 - z_5z_6z_7z_8z_9 - z_{10}.$$

Die erste Ziffer kennzeichnet das Land, die nächsten drei Ziffern den Verlag, die nächsten fünf Ziffern das Buch, und die letzte Ziffer  $z_{10}$  ist eine Prüfziffer, für die auch die römische Zahl  $X$  (für 10) stehen kann. Sie dient den Buchhändlern bei Bestellungen von Büchern zur Kontrolle dafür, dass die ersten 9 Ziffern korrekt eingegeben sind. Berechnet wird die Prüfziffer durch

$$z_{10} \equiv (1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + \dots + 9z_9) \pmod{11}.$$

- Bei der Eingabe der ISBN-Nummern werden häufig folgende Fehler gemacht:
  - Genau eine der ersten neun Ziffern wird falsch eingegeben.
  - Zwei der ersten neun Ziffern werden vertauscht.

Zeigen Sie, dass Fehler (i) und ebenso Fehler (ii) anhand der Prüfziffer entdeckt werden kann.

- Sie wollen ein Buch bestellen mit der ISBN-Nummer  $3 - 827 - 422?5 - X$ . Eine Ziffer (?) können Sie nicht erkennen. Errechnen Sie diese Ziffer. Um welches Buch handelt es sich dabei?

**Abgabe** bis Montag, den 22. November 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, Ihrer **Fachrichtung** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.