Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

5. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Definieren Sie auf der Menge $\mathbb{H} := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ die folgende Verknüpfung:

$$\circ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad (x, y) \circ (u, v) := (x \cdot u - \overline{v} \cdot y\ ,\ v \cdot x + y \cdot \overline{u})$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H} \setminus \{(0,0)\}, \circ)$ eine Gruppe ist.

(b) Betrachten Sie auf $\mathbb{H}$ noch die von der Addition auf $\mathbb{C}$ induzierte Produktverknüpfung (wie in der Zusatzaufgabe vom Blatt 2), die wir auch mit „+“ bezeichnen. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, +, \circ)$ die Distributivgesetze erfüllt.

(c) Ist $(\mathbb{H}, +, \circ)$ ein Körper?

Aufgabe 2.
Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$T : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}, \quad T(w) := \frac{w - i}{w + i}\ .$$

(a) Geben Sie $T(2i)$ und $T(3 + 2i)$ in der Form $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) an.

(b) Ist T injektiv?

(c) Ist T surjektiv?

(d) Bestimmen Sie die Menge $T(\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\})$.

Aufgabe 3.
Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A := (a_{jk})$ eine $(n,\, n)-$Matrix mit

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für alle } j,\, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } j \leq k\ .$$

Zeigen Sie: $A^m = 0$ für alle $m \geq n$.

Die folgende Aufgabe wird nicht korrigiert:

Aufgabe 4.

(a) Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Betrachten Sie die Einsetzungsabbildung

$$\varepsilon_A : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n \times n}, \qquad f \mapsto f(A)$$

(mit $\varepsilon_A(\lambda) = \lambda E_n$ für ein konstantes Polynom $\lambda \in \mathbb{K}$). Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\varepsilon_A(f \cdot g) = \varepsilon_A(f) \cdot \varepsilon_A(g) \quad \text{und} \quad \varepsilon_A(\lambda f + g) = \lambda \varepsilon_A(f) + \varepsilon_A(g)\ .$$

(b) Es seien $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $f \in \mathbb{F}[X]$ das Polynom $X^4 + X^2 + X + 1$. Berechnen Sie $f(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}.$$

(c) Erklären Sie, warum $(\mathbb{K}^{n \times n} \setminus \{0\}, \cdot)$ für $n \geq 2$ und $(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppen sind.

(d) Es seien $f, g, h \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ beliebige Polynome. Folgt aus $f \cdot g = f \cdot h$ die Identität $g = h$?

Abgabe bis Montag, den 29. November 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.