FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

6. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Es seien p und q Polynome über dem Körper $\mathbb{K}$ und $q \neq 0$. Wir setzen $r_0 := p$ und $r_1 := q$. Nach einem Satz der Vorlesung (vgl. Satz 14 im Skript) existieren zwei Polynome $r_2, s_1 \in \mathbb{K}[X]$ mit Grad $r_2 <$ Grad r_1 und

$$r_0 = s_1 \cdot r_1 + r_2;$$

ist $r_2 \neq 0$, so existieren $s_2, r_3 \in \mathbb{K}[X]$ mit Grad $r_3 <$ Grad r_2 und

$$r_1 = s_2 \cdot r_2 + r_3 \quad \text{usw.}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r_{n+1} = 0$.

(b) r_n ist dann ein Teiler von p und von q.

(c) r_n ist größter gemeinsamer Teiler von p und q, d.h. wenn $d \in \mathbb{K}[X]$ die Polynome p und q teilt, so teilt d auch r_n.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus (vgl. das Beispiel im Skript auf S. 67/68), dass die Polynome $p := X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 1$ und $q := X^3 - X$ in $\mathbb{R}[X]$ teilerfremd sind, und bestimmen Sie Polynome $r, s \in \mathbb{R}[X]$ mit

$$r \cdot p + s \cdot q = 1.$$

Aufgabe 3.
Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_3$ bzw. $\mathbb{F}_7$ sei:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2.
\end{array}$$

Bestimmen Sie in jedem dieser drei Fälle die Lösungsmenge.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es sei A eine reelle (m, n)-Matrix. Zeigen Sie: Ist das LGS $Ax = b$ lösbar, so ist auch das LGS $A^\top Ax = A^\top b$ lösbar, und die beiden Lösungsmengen sind gleich.

Abgabe bis Montag, den 6. Dezember 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.