FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

7. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(a) Es seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Genau dann ist $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

(b) Es seien $U_j \subsetneq V$ $(j = 1, \dots, m)$ Untervektorräume. Ist $|\mathbb{K}| > m$, so gilt $U_1 \cup \cdots \cup U_m \neq V$.

Aufgabe 2.
Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ vorgegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ a+1 \\ 0 \\ a+2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix}, \qquad v_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \\ 2a+2 \end{pmatrix}, \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die sich w als Linearkombination von $v_1, \dots, v_5$ darstellen läßt, und geben Sie in diesem Fall alle Linearkombinationen an.

Aufgabe 3.
Welche der folgenden Teilmengen A des Vektorraumes V sind linear unabhängig, welche linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Es sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v_1, \dots, v_4 \in V$ seien linear unabhängig und
$A := \{v_1 + 2v_2 - v_4,\ v_1 + 4v_2 + 2v_3 + v_4,\ v_1 - v_2 + \frac{1}{3}v_3 + v_4\}$;

(b) $V := \mathbb{R}[X],\ A := \{1 + 2X^4,\ 1 + 2X^2 - X^3 + 2X^4,\ 2X^2 + 2X^4,\ 2 - 2X^2 + 2X^4\}$;

(c) $V := \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ A := \{(\frac{k}{n^k})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, k = 1, 2, \dots\}$. Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ den Vektorraum aller Folgen reeller Zahlen.

Die folgende Aufgabe wird nicht korrigiert:

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, dass die reelle Matrix

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 5 \\ -4 & -4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

regulär ist und berechnen Sie A^{-1}.

Abgabe bis Montag, den 13. Dezember 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.