Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)
8. Übungsblatt

Aufgabe 1.
In einem Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$ seien $v_1, v_2, ..., v_n, v \in V$ gegeben mit

$$v_n \in U := [v_1, ..., v_{n-1}] \qquad \text{und} \qquad v \in V \setminus U.$$

Zeigen Sie: Die Vektoren $v_1+v, v_2+v, ..., v_n+v$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $v_1 - v_n, ..., v_{n-1} - v_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2.
Gegeben seien für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ im Vektorraum $\mathbb{K}^4$ die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\mathbb{K}$ eine Basis von $U := [x_1, x_2, x_3]$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{K}^4$.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie je eine Basis für die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

(a) $\{f \in \mathbb{R}[X] : \mathrm{Grad}(f) \leq 4, f(1) = f(-1) = 0\}$,

(b) $\left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f(n) = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = 0 \right\}$,

(c) $\left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es seien B eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängige Vektoren aus V. Zeigen Sie, dass es eine $k-$elementige Menge $B' \subset B$ gibt, so dass $\{x_1, \ldots, x_k\} \cup (B \setminus B')$ wieder eine Basis von V ist.

Abgabe bis Montag, den 20. Dezember 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.