FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und Θ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $V = \text{Kern}\,\Theta + \text{Bild}\,\Theta$.

(ii) $V = \text{Kern}\,\Theta \oplus \text{Bild}\,\Theta$.

(iii) $\text{Bild}\,\Theta = \text{Bild}\,(\Theta^2)$.

(iv) $\dim \text{Bild}\,\Theta = \dim \text{Bild}\,(\Theta^2)$.

Aufgabe 2.
Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\Pi(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\,\Pi$, $\mathrm{Bild}\,\Pi$ und deren Dimensionen.

(c) Zeigen Sie, dass Π eine Projektion ist.

Aufgabe 3.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ die durch $x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$ gegebene lineare Abbildung und

$$U := [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\Phi|_U)$ und $\mathrm{Bild}\,(\Phi|_U)$.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Φ ist surjektiv.

(ii) Für jede Linearform $\Psi : W \to \mathbb{K}$ gilt:

$$\Psi \circ \Phi = O \implies \Psi = O,$$

wobei O jeweils die Nullabbildung bezeichnet.

Abgabe bis Montag, den 17. Januar 2010, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.