FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)
11. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Gegeben seien die Linearformen

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_5) & \mapsto & 2x_1 \end{array}$$

und für $j = 2, \ldots, 5$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_j : & \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_5) & \mapsto & x_j + x_{j-1} \end{array} .$$

Zeigen Sie, dass $B^* := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_5\}$ eine Basis des Dualraumes des $\mathbb{R}^5$ ist, und geben Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^5$ an, die B^* als Dualbasis hat.

Aufgabe 2.
Es seien V ein zweidimensionaler Vektorraum und $\mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \to V$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

Für jedes $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ *sind die Vektoren* $\mathrm{Id}, \Phi, \Phi^2$ *linear abhängig.*

Dabei heißen die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes W linear abhängig, falls es ein k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{K}^k \setminus \{0\}$ mit $\sum_j a_j w_j = 0$ gibt.

Aufgabe 3.
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Matrix und $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ die durch A gegebene lineare Abbildung. Finden Sie geordnete Basen $v_1, \ldots, v_4$ von $\mathbb{R}^4$ und w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$, so dass Φ bzgl. (v_j) und (w_k) die Abbildungsmatrix

$$B_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat.

Die folgende Aufgabe wird nicht korrigiert:

Aufgabe 4.
Es seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\phi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$ zwei Linearformen. Zeigen Sie:

$$\phi, \psi \text{ linear abhängig in } V^* \iff \mathrm{Kern}(\phi) = \mathrm{Kern}(\psi).$$

Abgabe bis Montag, den 24. Januar 2011, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.

Hinweis. Einen Übungsschein erhalten Sie, wenn Sie auf den Übungsblättern 1-12 insgesamt mindestens 70 Punkte gesammelt haben.