FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

12. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Es sei $B = (v_1, \ldots, v_5)$ eine geordnete Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V und Φ der Endomorphismus von V, der durch folgende Vorschrift gegeben ist:

$$\begin{array}{rcrrrrr}
\Phi(v_1) & = & & v_2 & & & -v_5 \\
\Phi(v_2) & = & 3v_1 & +6v_2 & & & +v_5 \\
\Phi(v_3) & = & 5v_1 & +3v_2 & -v_3 & -3v_4 & +4v_5 \\
\Phi(v_4) & = & 4v_1 & & & +3v_4 & \\
\Phi(v_5) & = & v_1 & -3v_2 & & & +v_5
\end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A_Φ von Φ bzgl. B.

(b) Zeigen Sie, dass $w_1 = v_1 + v_5, w_2 = v_2 + v_5, w_3 = 2v_1 - v_2 - v_5$ linear unabhängig sind, und dass für $U := [w_1, w_2, w_3]$ gilt: $\Phi(U) \subset U$.

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\Phi\big|_U$ bzgl. der Basis $C = (w_1, w_2, w_3)$.

Aufgabe 2.
Es seien V ein $n-$dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V.

(a) Zeigen Sie: Besitzt Φ bezüglich jeder Basis von V dieselbe Abbildungsmatrix, so gibt es ein $c \in \mathbb{K}$ mit $\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ vertauschbar ist, d. h. $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllt, von der Form $A = c \cdot E_n$, $c \in \mathbb{K}$, ist.

Aufgabe 3.
Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\widetilde{B} = (\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n)$ zwei geordnete Basen von V, $C = (w_1, \ldots, w_m)$ und $\widetilde{C} = (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_m)$ zwei geordnete Basen von W sowie $L : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota_B : \mathbb{K}^n \to V, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ ein Isomorphismus ist.

Die Abbildungen $\iota_{\widetilde{B}} : \mathbb{K}^n \to V$, $\iota_C : \mathbb{K}^m \to W$ and $\iota_{\widetilde{C}} : \mathbb{K}^m \to W$ seien analog zu ι_B in (a) erklärt. Weiterhin sei $\Psi_B^{\widetilde{B}} := \iota_{\widetilde{B}}^{-1} \circ \iota_B$ und $\Psi_C^{\widetilde{C}} := \iota_{\widetilde{C}}^{-1} \circ \iota_C$.

(b) Seien speziell $V = \mathbb{R}^3$,

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \widetilde{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Geben Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass $\Psi_B^{\widetilde{B}}(x) = Tx$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Es sei A die Abbildungsmatrix von L bzgl. der Basen B, C und $\widetilde{A}$ die Abbildungsmatrix von L bzgl. der Basen $\widetilde{B}, \widetilde{C}$. Rechnen Sie nach, dass das folgende Diagramm kommutiert, d.h., verifizieren Sie, dass $\iota_C \circ A = L \circ \iota_B$, $\iota_{\widetilde{C}} \circ \widetilde{A} = L \circ \iota_{\widetilde{B}}$, $\Psi_C^{\widetilde{C}} \circ A = \widetilde{A} \circ \Psi_B^{\widetilde{B}}$ sowie $\iota_{\widetilde{C}} \circ \Psi_C^{\widetilde{C}} = \iota_C$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "A"] \arrow[dr, "\iota_B"] \arrow[dd, "\Psi_B^{\widetilde{B}}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[dl, "\iota_C"'] \arrow[dd, "\Psi_C^{\widetilde{C}}"] \\
& V \arrow[r, "L"] & W & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\widetilde{A}"] \arrow[ur, "\iota_{\widetilde{B}}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ul, "\iota_{\widetilde{C}}"]
\end{tikzcd}$$

(d) Es seien nun $V = W = \mathbb{R}^3$, $C = B$ und $\widetilde{C} = \widetilde{B}$ mit $B, \widetilde{B}$ wie in (b). Geben Sie die Abbildungsmatrizen A und $\widetilde{A}$ für die Abbildung

$$L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 3x_3, 2x_2, 3x_1 - x_3)$$

explizit an.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Gegeben seien die symmetrische Gruppe S_n, $n \geq 2$, die Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_m, +)$, $m \geq 2$, und ein (Gruppen-)Homomorphismus $f : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$. Zeigen Sie:

(a) Für alle Permutationen $\pi \in S_n$ gilt $f(\pi) + f(\pi) = 0$.

(b) Ist f surjektiv, so gilt $m = 2$.

Abgabe bis Montag, den 31. Januar 2011, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.
Hinweis: Einen Übungsschein erhalten Sie, wenn Sie auf den Übungsblättern 1-12 insgesamt mindestens 70 Punkte gesammelt haben.