Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen $A, B \subseteq M$ und $X, Y \subseteq N$ gilt:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
(c) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
(d) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Gilt in (b) sogar Gleichheit?

Aufgabe 2 (K)

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist injektiv.
(ii) Für alle $A, B \subseteq M$ gilt: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
(iii) Für alle $A \subseteq B \subseteq M$ gilt: $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

Aufgabe 3

Es sei X eine Menge und es bezeichne $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von X. Ist Y eine weitere Menge, so bezeichne $\mathrm{Abb}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

(a) Es sei X eine endliche Menge mit n Elementen. Geben Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^n$ an.
(b) Es sei nun X beliebig. Geben Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0, 1\})$ an.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden auf der Menge A definierten Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:

(a) (Relation „Teilen“) Es sei $A = \mathbb{N}$ und für $a, b \in \mathbb{N}$ gelte:
$$a|b \iff \exists c \in \mathbb{N} : ac = b$$

(b) Es sei $A = \mathbb{R}$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte:
$$x \sim y \iff |x - y| < 3$$

(c) Es sei $A = \mathbb{R}$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte:
$$x \sim y \iff x > 5$$

Aufgabe 5

(a) Auf der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1,2)$.

(b) Auf der Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(z_1,n_1)\sim(z_2,n_2) \;\Leftrightarrow\; z_1n_2=z_2n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie eine bijektive Abbildung von der Quotientenmenge $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}/_\sim=\{[(z,n)]_\sim \mid (z,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$ auf die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen an.

Aufgabe 6

Zeigen Sie:

(a) Eine Gruppe mit genau zwei Elementen ist abelsch.

(b) Ist G eine Gruppe mit neutralem Element 1 und gilt $a\cdot a=1$ für alle $a\in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 7 (K)

Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Für $A,B\in\mathcal{P}(X)$ sei ihre symmetrische Differenz wie folgt definiert:

$$A\bigtriangleup B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ mit der Verknüpfung $\bigtriangleup$ eine abelsche Gruppe ist.

Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Hallo Du,

hier spricht deine Fachschaft. Wir hoffen, dass du die beste O-Phase deines Lebens hinter dir hast und super in dein Studium starten konntest. Damit wir die nächste O-Phase noch besser machen können, brauchen wir dein Feedback. Daher nimm dir doch bitte x Minuten Zeit um diese Umfrage hier auszufüllen:

www.asta-kit.de/o-phase/umfrage

Deine Fachschaft dankt und die Erstis des nächsten Jahres werden es dir danken!

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.