Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (K)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -11 & -11 & 45 \\ 1 & 11 & 10 & -83 \\ 1 & -6 & -5 & 81 \\ 0 & -3 & -3 & 42 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

(c) $C = (c_{ij})$, gegeben durch $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } i = j \\ 1 & \text{, falls } i \neq j \end{cases}$ für $1 \leqslant i, j \leqslant n$

Aufgabe 2

Es seien $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch (d.h. $A^\top = -A$). Zeigen, dass $\det A = 0$ gilt.

Aufgabe 3

Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv durch $f_0 = f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$ definiert.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei F_n die komplexe $n \times n$-Matrix

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(F_1)$ und $\det(F_2)$ und zeigen Sie, dass $\det(F_n) = f_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 4 (K)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Matrix $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}^{n\times n}(K)$ durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j \\ -j & \text{, falls } i = j+1 \\ i & \text{, falls } i = j-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_2, A_3, stellen Sie eine Vermutung für $\det(A_n)$ auf und beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe vollständiger Induktion.

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.