Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (K)

Entscheiden Sie, ob die folgenden reellen Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls ihr Inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(K,K)$ mit den Verknüpfungen

$$(f+g)(r) = f(r)+g(r)$$

und

$$(f\cdot g)(r) = f(r)\cdot g(r)$$

ein kommutativer Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$K[X] \longrightarrow \mathrm{Abb}(K,K)\,,\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto \Big(r \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i r^i\Big)$$

ein Ringhomomorphismus ist. Zeigen Sie weiter, dass für $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dieser Ringhomomorphismus nicht injektiv ist.

Aufgabe 4 (K)

Es sei K ein Körper.

(a) Weisen Sie nach, dass der Polynomring $K[X]$ ein K-Vektorraum ist, indem Sie die Vektorraumaxiome für $K[X]$ nachweisen.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in K$ die Menge $U_t = \{f \in K[X] \mid f(t) = 0\}$ ein Untervektorraum von $K[X]$ ist.

(c) Es sei $s \neq t$. Zeigen Sie, dass dann $U_s + U_t = K[X]$ gilt. Ist diese Summe direkt?

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.