Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[x]$ kein Körper ist. Bestimmen Sie ferner alle $f \in K[x]$, die bezüglich der Multiplikation in $K[x]$ ein inverses Element besitzen (die sogenannten **Einheiten** des Ringes $K[x]$).

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ i & -3 & 1-i \\ 1 & 0 & 2+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Charakteristik von K die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

und entscheiden Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4 (K)

Es sei für $t \in \mathbb{R}$ die reelle Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5 (K)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, geben Sie eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D an mit $D = P^{-1}AP$.

(b) Ist A ähnlich zu $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ oder zu $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.