Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (K)

Es seien V ein n-dimensionaler Vektorraum über K und φ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass φ genau dann triangulierbar / trigonalisierbar ist, wenn es eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V gibt, so dass die Untervektorräume $U_j = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_j\}$ φ-invariant sind, das heißt, so dass $\varphi(U_j) \subseteq U_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist N eine nilpotente Matrix, so gilt $p_{E \pm N} = (-1)^n (X-1)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\det(E \pm N) = 1$. (Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis die Tatsache, dass jede nilpotente Matrix ähnlich zu einer Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ii} = 0$ ist.)

(b) Sind M, N nilpotente Matrizen und gilt $MN = NM$, so ist $M \pm N$ nilpotent.

(c) Ist N nilpotent und $A \in K^{n \times n}$ mit $NA = AN$, so sind AN und $(A - \lambda E)N$ nilpotent, $\lambda \in K$. Ist zusätzlich A invertierbar, so ist $A^{-1}N$ nilpotent.

(d) Ist $N \in K^{n \times n}$ nilpotent und $H \in K^{n \times n}$ mit $HN = NH$, so gilt $p_H = p_{H+N}$. Insbesondere gilt $\det(H + N) = \det(H)$.

Aufgabe 3

Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, welche die konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = a + bi$ und $\lambda_2 = a - bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, besitzt. Zeigen Sie, dass wenn $x = (z_1, \dots, z_n)$ ein Eigenvektor von A zu λ_1 ist, dann $\overline{x} = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$ ein Eigenvektor von A zu λ_2 ist.

Aufgabe 4

Es seien V ein Vektorraum über K, φ ein Endomorphismus von V und $f \in K[x]$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern} f(\varphi)$ ein φ-invarianter Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 5 (K)

Bestimmen Sie für folgende komplexe Matrizen sämtliche Haupträume und deren Indizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.