Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt für die vorlesungfreie Zeit

Aufgabe 1

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Für ein festes $v \in V \setminus \{0\}$ betrachten wir den Untervektorraum

$$U = \langle \{\varphi^n(v), \varphi^{n-1}(v), \dots, \varphi(v), v\} \rangle.$$

(a) Es sei $k = \dim U$. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{B} = (\varphi^{k-1}(v), \varphi^{k-2}(v), \dots, \varphi(v), v)$$

eine Basis von U ist.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(\varphi|_U)$ an.

(c) Es sei nun $\mathfrak{C}$ die Basis

$$\mathfrak{C} = (v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^{k-1}(v)),$$

also eine Basis, die mit $\mathfrak{B}$ als Menge übereinstimmt, aber in der die Anordnung der Basisvektoren umgekehrt ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{C}}(\varphi|_U)$ sowie die Basiswechselmatrix $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\mathrm{id}_U)$

Aufgabe 2

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\tilde{A}$ von A und eine reguläre Matrix T, für welche $T^{-1}AT = \tilde{A}$ gilt.

Aufgabe 3

Ein Endomorphismus $\varphi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ sei für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch $\varphi(x) = Ax$ gegeben. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von φ sowie eine zugehörige Basis.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Es sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & -\alpha & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Jordansche Normalform $\tilde{A}_\alpha$ der Matrix A_α

(b) Geben Sie für den Fall $\alpha = -1$ eine reguläre Matrix T an, so dass $\tilde{A}_\alpha = T^{-1} A_\alpha T$ gilt.

Aufgabe 5

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben, für deren charakteristisches Polynom

$$p_A = (-1)^n (X - \lambda)^n$$

gilt.

Zeigen Sie, dass für $n \leqslant 6$ die Jordansche Normalform von A durch $\dim E_\lambda$ und den Index q_λ (bis auf die Reihenfolge) bestimmt ist. Gilt dies auch für $n \geqslant 7$?

Wir wünschen Ihnen eine erholsame vorlesungfreie Zeit!