Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es sei G eine Gruppe. Die Menge $\mathrm{Z}(G)$ jener Elemente von G, welche mit allen Elementen von G kommutieren, heißt das Zentrum von G:

$$\mathrm{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall a \in G : ag = ga\}$$

Zeigen Sie, dass das Zentrum von G eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2

Es sei G eine Gruppe und für jedes $g \in G$ sei

$$H_g = \{a \in G \mid g = a^{-1}ga\}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H_e = G$.

(b) Für jedes $g \in G$ ist H_g eine Untergruppe von G.

(c) Für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt $H_g \cap H_h < H_{gh}$.

(d) Geben Sie in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}(\{1,2,3\})$ Elemente g, h an, für die $H_g \cap H_h \neq H_{gh}$ gilt.

Aufgabe 3 (K)

Es seien G eine Gruppe und H, K Untergruppen von G.

(a) Zeigen Sie, dass $H \cap K$ eine Untergruppe von G ist.

(b) Untersuchen Sie, ob $H \cup K$ immer eine Untergruppe von G ist. Finden Sie dazu entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(c) Es sei nun K ein Normalteiler in G. Zeigen Sie, dass dann $H \cdot K = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ eine Untergruppe von G ist. Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall K auch ein Normalteiler von $H \cdot K$ ist.

Aufgabe 4

Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn G abelsch ist. Zeigen Sie außerdem, dass ι dann sogar ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5 (K)

Es sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $h \in H$ und alle $g, g' \in \varphi^{-1}(\{h\})$ ein eindeutiges Element $k \in \operatorname{Kern}\varphi$ existiert, so dass $g' = gk$ gilt.

(b) Es seien $h, h' \in H$, so dass $\varphi^{-1}(\{h\})$ und $\varphi^{-1}(\{h'\})$ nicht-leer sind. Geben Sie eine Bijektion zwischen $\varphi^{-1}(\{h\})$ und $\varphi^{-1}(\{h'\})$ an.

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.