Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Bestimme alle Nullteiler von $\mathbb{Z}_8$.

Aufgabe 2 (K)

Die meisten Bücher sind heutzutage mit einer zehnstelligen Zahl, der ISBN-Nummer, gekennzeichnet,

$$z_1 - z_2z_3z_4 - z_5z_6z_7z_8z_9 - z_{10}.$$

Die erste Ziffer kennzeichnet das Land, die nächsten drei Ziffern den Verlag, die nächsten fünf Ziffern das Buch, und die letzte Ziffer z_{10} ist eine Prüfziffer, für die auch die römische Zahl X (für 10) stehen kann. Sie dient den Buchhändlern bei Bestellungen von Büchern zur Kontrolle dafür, dass die ersten 9 Ziffern korrekt eingegeben sind. Berechnet wird die Prüfziffer durch

$$z_{10} \equiv (1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + \ldots + 9z_9) \mod 11.$$

(a) Bei der Eingabe der ISBN-Nummern werden häufig folgende Fehler gemacht:
- Genau eine der ersten neun Ziffern wird falsch eingegeben.
- Zwei der ersten neun Ziffern werden vertauscht.

Zeigen Sie, dass beide Fehler anhand der Prüfziffer entdeckt werden können.

(b) Sie wollen ein Buch bestellen mit der ISBN-Nummer $3-642-02?61-4$. Eine Ziffer (?) können Sie nicht erkennen. Errechnen Sie diese Ziffer. Um welches Buch handelt es sich dabei?

Aufgabe 3

(a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - \mathrm{i}$, $z_2 = -2 + 4\mathrm{i}$ und $z_3 = \sqrt{3} - 2\mathrm{i}$. Berechnen Sie $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+\mathrm{i}}\right|$ und geben Sie für $\frac{1}{2}\left(\frac{z_3}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{z_3}\right)$ und $\overline{(z_2 + z_3)(z_1 - z_3)}$ jeweils den Real- und Imaginärteil an.

(b) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, welche die Bedingung $z + \bar{z} = z\bar{z}$ erfüllen. Skizzieren Sie außerdem die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $|z| < |z - 2\mathrm{i}| < 3$ gelten.

Aufgabe 4 (K)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Welche sind falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

(a) $V_1 = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \text{ konvergiert}\}$ ist mit der Addition und skalaren Multiplikation für Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $V_2 = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und der skalaren Multiplikation, die gegeben sei durch $0 \cdot z = 0$ und $1 \cdot z = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.

(c) $V_3 = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ mit der üblichen Multiplikation als Vektoraddition und der skalaren Multiplikation $\lambda \odot v = v^{\lambda}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 = -y^2\}$ mit der von $\mathbb{Q}^2$ ererbten Addition und skalaren Multiplikation ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen V mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\diamond$ sind Vektorräume über $\mathbb{R}$? (Man überlege sich, welche der definierenden Eigenschaften gelten und welche verletzt sind.)

(a) $V = \mathbb{R};\ x \oplus y = x + y;\ a \diamond x := 0,\ (x, y \in V,\ a \in \mathbb{R})$

(b) $V = \mathbb{Q};\ x \oplus y = x + y;\ a \diamond x := ax,\ (x, y \in V,\ a \in \mathbb{R})$

(c) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0, x + 5y = 0\}$ mit den komponentenweisen Verknüpfungen auf $\mathbb{R}^2$
Was ändert sich für $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 1, x + 5y = 0\}$?

Zusatz zu (b): Man überlege sich, dass $V = \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen in (b) ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.