Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ des folgenden Systems von Gleichungen

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \\ x+y-z &= 0, \\ -x-y &= 0, \end{aligned}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2 (K)

(a) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

- $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x_3 - x_2 = 2x_1 + 4x_2 \right\}$

(b) Ist die Menge $\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(\frac{1}{2}) = 0 \}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}([0,1], \mathbb{R})$?

Aufgabe 3

Es sei V ein K-Vektorraum sowie S und T Teilmengen von V. Zeigen Sie:

(a) $[S \cap T] \subset [S] \cap [T]$.

(b) In (a) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit.

(c) $[S \cup T] = \big[[S] \cup [T] \big]$ und insbesondere $[[S]] = [S]$.

Aufgabe 4 (K)

Seien $U_1, \dots, U_n$ Untervektorräume eines K-Vektorraumes V. Dann ist auch

$$U = U_1 + \dots + U_n = \{ u_1 + \dots + u_n \mid u_j \in U_j \text{ für alle } j = 1, \dots, n \}$$

ein Untervektorraum von V.

(a) Man beweise, dass folgende drei Bedingungen äquivalent sind:

(i) Ist $u_1 + \dots + u_n = 0$ in U, so folgt $u_j = 0$ für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Für jede $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + \dots + u_n$ mit $u_j \in U_j$ eindeutig.

(iii) Es ist $U_i \cap (U_{i+1} + \dots + U_n) = \{0\}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

(b) Man zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass die obigen Bedingungen für $n > 2$ im allgemeinen nicht äquivalent zu $U_1 \cap \dots \cap U_n = \{0\}$ sind.

Aufgabe 5

Lässt sich der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ schreiben? Wenn ja, gebe man alle möglichen Linearkombinationen an.