Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Es seien v_1, v_2, v_3 drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Man beweise oder widerlege die folgende Behauptung:
Sind jeweils zwei der Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, so ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ die Elemente 1, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (K)

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei eine Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} (a-x)^3 & \text{falls } x \leqslant a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ im reellen Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4

Man konstruiere eine Basis für den von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5

Es sei V ein reeller Vektorraum mit Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, sowie $U_1 = [b_1, b_2]$, $U_2 = [b_2, b_4]$ und $U_3 = [b_3]$.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i) $b_2 \in U_1 \cap U_2$

ii) $2b_1 - b_3 \in U_1 \cup U_3$

iii) $b_1 - b_3 \in U_1 + U_3$

(b) Welche der Summen ist direkt?

i) $U_1 + U_2$

ii) $U_1 + U_3$

iii) $U_2 + U_3$

iv) $U_1 + U_2 + U_3$

(c) Welche der folgenden Klassen sind in V/U_1 gleich? Welche sind linear unabhängig?

$$v_1 = [3b_2 + 4b_3], \quad v_2 = [b_1 - b_2 + b_3], \quad v_3 = [b_1 + 4b_3], \quad v_4 = [b_3 + b_4]$$

(d) Bestimmen Sie eine Basis von V/U_1.

Aufgabe 6 (K)

Es bezeichne U den von dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie für die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$$

die Klassen $[v]$, $[w]$, $[3v+w]$ und $[v] - 2[w]$ in dem Faktorraum $\mathbb{R}^3/U$ an.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$.

(c) Stellen Sie die Vektoren

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3/U$$

bzgl. der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?