Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Es seien V ein Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie:
Sind $[a_1],\dots,[a_n]$ linear unabhängig im Quotiententraun V/U, so sind $a_1,\dots,a_n$ linear unabhängig in V.
Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?

Aufgabe 2 (K)

In $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } x_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von $U = \operatorname{Span}(x_1,x_2,x_3)$, $V = \operatorname{Span}(x_4,x_5)$ und $W = U \cap V$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für beliebige Untervektorräume $U_1,\dots,U_k$ eines endlich dimensionalen Vektorraumes V

$$\dim(U_1+\dots+U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$$

gilt.

Aufgabe 4 (K)

Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und U ein Untervektorraum von V.

(a) Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum W von V gibt, so dass $V = U \oplus W$ gilt.

(b) Es seien W_1 und W_2 Untervektorräume von V. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 = W_2$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass ein Vektorraum V genau dann eine direkte Summe von Untervektorräumen $W_1,\dots,W_k$ ist, wenn $V = W_1 + \cdots W_k$ gilt und für alle $w_1 \in W_1 \setminus \{0\},\dots,w_k \in W_k \setminus \{0\}$ die Vektoren $w_1,\dots,w_k$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 6

Es seien V und W K-Vektorräume sowie U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie:

(a) $Z = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V,W) \mid U \subset \operatorname{Kern}\varphi\}$ ist ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}_K(V,W)$.

(b) $\operatorname{Hom}_K(V,W)/Z \cong \operatorname{Hom}_K(U,W)$.

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.