Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}^{n\times n}(K)$ ist ihre Spur definiert als:

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathcal{M}^{n\times n}(K) \to K, \varphi(A) = \operatorname{Spur}(A)$ linear ist.

Aufgabe 2

Es seien V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und φ eine lineare Abbildung von V in einen Vektorraum W. Dann ist φ durch $w_1 = \varphi(v_1), \ldots, w_n = \varphi(v_n)$ eindeutig bestimmt. Zeigen Sie:

(a) φ ist genau dann injektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind.

(b) φ ist genau dann surjektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ ein Erzeugendensystem von W bilden.

(c) φ ist genau dann bijektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W bilden.

Aufgabe 3

Es seien V ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ und $f : V \to V$ eine Abbildung, welche $f(u+v) = f(u) + f(v)$ für alle $u, v \in V$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass f linear ist.

Aufgabe 4

Es sei V der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : V \to V, A \mapsto A + A^{\top}$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\varphi)$ und $\operatorname{Bild}(\varphi)$.

Aufgabe 5 (K)

Es seien V, W und U endlichdimensionale Vektorräume sowie $f : V \to W$ und $g : W \to U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) $g \circ f$ ist linear.

(b) $\dim \operatorname{Bild}(g \circ f) = \dim \operatorname{Bild}(f) - \dim\big(\operatorname{Bild}(f) \cap \operatorname{Kern}(g)\big)$

(c) $\dim \operatorname{Bild}(g \circ f) \leqslant \min\{\dim \operatorname{Bild}(g), \dim \operatorname{Bild}(f)\}$

(d) $\dim \operatorname{Kern}(g \circ f) \geq \dim \operatorname{Kern}(f)$

Bitte wenden!

Aufgabe 6 (K)

Es bezeichnen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_4$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ und es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(\varphi)$.

(b) Es seien

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi)$.

Aufgabe 7

Es seien V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum von V. Für jedes $i \leqslant n$ sei $v_i^* \in V^*$ definiert durch

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ ist eine Basis von V^*, die sogenannte zu $\mathcal{B}$ duale Basis.

(b) Ist $\varphi : V \to W$ linear, so ist

$$\varphi^* : W^* \to V^*, \alpha \mapsto \alpha \circ \varphi$$

ebenfalls linear.

(c) Ist $\mathcal{C}$ eine Basis von W und $\mathcal{C}^*$ die zu $\mathcal{C}$ duale Basis, so gilt $M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*}(\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi)^\top$