Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$\mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\overline{\mathcal{B}} = \left(\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

und im $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$\mathcal{C} = \left(c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\overline{\mathcal{C}} = \left(\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben und es sei φ die durch

$$\begin{array}{rcrcrcr} \varphi(b_1) & = & -3c_1 & & & + & 2c_3 \\ \varphi(b_2) & = & 7c_1 & + & c_2 & + & c_3 \\ \varphi(b_3) & = & & & c_2 & + & c_3 \\ \varphi(b_4) & = & c_1 & & & & \end{array}$$

definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie die Abbildungsmatrizen $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M^{\overline{\mathcal{C}}}_{\overline{\mathcal{B}}}(\varphi)$ an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie (geordnete) Basen $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die lineare Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} x$$

die folgende Abbildungsmatrix hat:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (K)

Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_5)$ eine Basis eines reellen Vektorraumes V und σ der durch

$$\begin{array}{rcrrrrr}
\sigma(b_1) & = & 4b_1 & +2b_2 & & -2b_4 & -3b_5 \\
\sigma(b_2) & = & & & -2b_3 & & +b_5 \\
\sigma(b_3) & = & & -4b_2 & +2b_3 & & -b_5 \\
\sigma(b_4) & = & -2b_1 & & +3b_3 & +b_4 & -b_5 \\
\sigma(b_5) & = & & 3b_2 & & & +2b_5
\end{array}$$

definierte Endomorphismus von V, d. h. $\sigma \in \mathrm{Hom}(V,V)$.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von σ und $\sigma \circ \sigma$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ mit $c_1 = b_2 + b_3 + b_5$, $c_2 = -b_3 + b_5$ und $c_3 = b_2 + b_5$ die Basis eines Untervektorraumes U von V mit $\sigma(U) \subset U$ ist.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix des Endomorphismus $\sigma|_U : U \to U$ (das ist die Einschränkung von σ auf U) bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

Aufgabe 4

Es seien V ein Vektorraum, U ein Untervektorraum von V und ρ ein Endomorphismus von V mit $\rho(U) \subset U$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\overline{\rho} : V/U \longrightarrow V/U,\ [x] = x + U \longmapsto [\rho(x)] = \rho(x) + U$$

eine lineare Abbildung definiert wird.

(b) Weiter sei $(v_1, \dots, v_k)$ eine geordnete Basis von U, die durch $v_{k+1}, \dots, v_n$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ergänzt werde. Die Abbildungsmatrix von ρ bezüglich B sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Zeigen Sie, dass $(v_{k+1} + U, \dots, v_n + U)$ eine Basis von V/U ist, bezüglich derer $\overline{\rho}$ die Abbildungsmatrix $(a_{ij})_{i,j=k+1\dots,n}$ hat.

Aufgabe 5 (K)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und α ein Endomorphismus von V.

(a) Zeigen Sie, dass α genau dann bezüglich jeder Basis von V dieselbe Abbildungsmatrix besitzt, wenn ein $\lambda \in K$ mit $\alpha = \lambda \mathrm{id}_V$ existiert.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass eine $n \times n$-Matrix A genau dann mit allen $n \times n$-Matrizen B kommutiert, wenn A von der Form λE_n für ein $\lambda \in K$ ist.

Aufgabe 6

Ein Endomorphismus π eines Vektorraumes V heißt Projektion, wenn $\pi \circ \pi = \pi$ gilt. Es sei $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Projektion und es gelte $\binom{1}{2} \in \mathrm{Kern}(\pi)$ und $\binom{1}{-1} \in \mathrm{Bild}(\pi)$. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\pi)$ bezüglich der Basen

(a) $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$

(b) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Abgabe bis nächsten Dienstag, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.