Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2014 / 2015)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

(a) Es seien $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Zeigen Sie, dass genau dann $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt, wenn f ein Isomorphismus ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K),\ f \longmapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist.

Aufgabe 2

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

(a) Es seien $\pi : V \to V$ eine Projektion sowie $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\pi)$ und $\mathcal{C}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\pi)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ eine Basis von V ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von π bezüglich der Basis $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ von V.

(b) Es seien U und W Untervektorräume von V mit der Eigenschaft $U \oplus W = V$. Zeigen Sie, dass es eine Projektion $\pi : V \to V$ gibt mit der Eigenschaft $U = \mathrm{Bild}(\pi)$ und $W = \mathrm{Kern}(\pi)$.

Aufgabe 3

Es seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Weiter sei

$$U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U : \varphi(u) = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $U^0 \subset V^*$ ein Untervektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^0)$ gilt.

(c) Es seien nun $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und U der von dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erzeugte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Basis von U^0.

Aufgabe 4 (K)

Es seien A eine reelle $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass falls das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, auch $A^\top Ax = A^\top b$ lösbar ist und die beiden Lösungsmengen übereinstimmen.

Aufgabe 5

Es seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sowie $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A)$, $\mathrm{Rang}(A|b)$ und $\mathrm{Rang}(A|c)$.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes $U = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid Ax = 0\}$ und lösen Sie das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$.

(c) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$.

Bitte wenden!

Aufgabe 6

Problem aus einem Altchinesischen Mathematikbuch:

Wieviele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel haben will, und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 3 Münzen und drei Küken 1 Münze kosten? Die 100 Münzen sollen hierbei vollständig verbraucht werden.

Stellen Sie ein passendes lineares Gleichungssystem auf und geben Sie eine Lösung dieses Systems an, die auch das Problem löst. Bestimmen Sie dann die Menge aller Lösungen des Systems.

Aufgabe 7 (K)

Es sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper K gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \end{array}$$

Bestimmen Sie für $K = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_5$ jeweils die Lösungsmenge.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr 2015 !

Abgabe bis Dienstag, den **13. Januar 2015**, 12 Uhr in die Kästen im Zähringer-Haus (Gebäude 01.85). Die Kästen befinden sich gegenüber den Seminarräumen Z 1 und Z 2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.