Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

In welchen der folgenden Fälle ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V?

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle := 6x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $\langle x, y\rangle_i := x^\top A_i y$, $i = 1,2$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $V = \mathbb{R}[X]$, $\langle p, q\rangle := \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ für $p, q \in \mathbb{R}[X]$ mit $p = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i X^i$

(d) $V = \{(x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_i) \text{ beschränkt}\}$, $\langle (x_i), (y_i)\rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i y_i}{i^2}$

(e) $V = C([0,1])$, $\langle f, g\rangle := \int\limits_0^1 f(x)\,dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)\,dx$

Aufgabe 2

Es sei $(V, \langle .,.\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Der reelle Vektorraum, den man durch Einschränkung der Skalarmultiplikation in V auf relle Zahlen erhält, sei mit $V_{\mathbb{R}}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass durch $\langle a, b\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}(\langle a, b\rangle)$ für $a, b \in V$ ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$ definiert wird. Was gilt für $\mathrm{Im}(\langle .,.\rangle)$?

Aufgabe 3 (K)

Es sei V der Vektorraum der rellen $n \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie: Durch

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^\top B), \qquad A, B \in V,$$

wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

(b) Es seien $\|A\|_2 := \sqrt{\langle A, A\rangle}, A \in V$, die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm von A und $\|v\|, v \in \mathbb{R}^n$, die Standardnorm. Zeigen Sie:

$$\|Av\| \leq \|A\|_2 \cdot \|v\|, \qquad A \in V, v \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 4 (K)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie: Für alle $a, b \in V$ gilt

(a) $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$,

(b) $\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}(\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$,

(c) $\langle a, b\rangle = 0 \iff \|a - b\| = \|a + b\|$.

Wie kann man die linke Seite der Formel in (b) anpassen, so dass sie für unitäre Vektorräume gilt?

Abgabe bis nächsten Freitag, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.