Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Es sei $V = \mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V bezüglich des Standardskalarprodukts und (η^1, η^2, η^3) die duale Basis von $V^* = \mathrm{Alt}^1(V)$.

(a) Wir setzen

$$\gamma^1 = \eta^2 \wedge \eta^3, \quad \gamma^2 = \eta^3 \wedge \eta^1, \quad \gamma^3 = \eta^1 \wedge \eta^2.$$

Dann ist $\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ eine Basis von $\mathrm{Alt}^2(V)$. Interpretieren Sie, dass Produkt $\alpha \wedge \beta$ für $\alpha = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \eta^i$ und $\beta = \sum_{i=1}^3 \beta_i \eta^i$ via der Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

(b) Es sei weiter $\mu = \sum_{i=1}^3 \mu_i \gamma^i \in \mathrm{Alt}^2(V)$. Interpretieren Sie das Produkt $\alpha \wedge \mu$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass für jede schiefsymmetrische multilineare Abbildung $\sigma : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p\text{-mal}} \to W$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : \Lambda^p V^* \to W$ existiert mit $\sigma(\psi_1, \ldots, \psi_p) = \Phi(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p)$ für alle $\psi_1, \ldots, \psi_p \in V^*$.

Zeigen Sie weiter: Ist $\tilde{W}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $s : V^* \times \cdots \times V^* \to \tilde{W}$ multilinear und schiefsymmetrisch, so dass für jedes σ wie oben eine lineare Abbildung $\Phi : \tilde{W} \to W$ mit $\sigma = \Phi \circ s$ gibt, so existiert ein Isomorphismus $F : \tilde{W} \to \Lambda^p V^*$ mit $F(s(\psi_1, \ldots, \psi_p)) = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p$ für alle $\psi_1, \ldots, \psi_p \in V^*$.

(b) Es seien V ein n-dimensionaler orientierter, euklidischer Vektorraum und $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass für die Volumenform vol auf V und alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (K)

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Es seien $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\alpha \in \mathrm{Alt}^n(V)$. Zeigen Sie, dass $\Phi^*\alpha = \det(\Phi) \cdot \alpha$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass Linearformen $\delta^1, \ldots, \delta^k \in V^*$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\delta^1 \wedge \cdots \wedge \delta^k \neq 0$ gilt.

Aufgabe 4 (K)

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\omega \in \mathrm{Alt}^2(V)$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\{\delta^1, \ldots, \delta^n\}$ von V^* gibt, so dass

$$\omega = \delta^1 \wedge \delta^2 + \cdots + \delta^{2r-1} \wedge \delta^{2r}$$

für ein $r \leq n/2$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass dieses r durch

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{r\text{-mal}} \neq 0, \qquad \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{(r+1)\text{-mal}} = 0$$

charakterisiert wird, insbesondere also unabhängig von der Basis ist.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.