Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Gegeben sei der $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Des Weiteren sei

$$\mathcal{O} := \left\{ \{v_1, \cdots, v_n\} \mid \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ ist eine Orthonormalbasis von } \mathbb{R}^n \right\}$$

die Menge aller Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes und

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid ||v|| = 1\}$$

die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\varphi : \mathrm{O}(n) \times \mathcal{O} \to \mathcal{O},\ \varphi(A, \{v_1, \cdots, v_n\}) := \{Av_1, \cdots, Av_n\}$ ist eine transitive Aktion der Gruppe $\mathrm{O}(n)$ auf $\mathcal{O}$.

(b) Die Abbildung $\varphi : \mathrm{O}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1},\ \varphi(A, v) \to Av$ ist eine transitive Aktion der Gruppe $\mathrm{O}(n)$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$.

Aufgabe 2

Es sei L eine nichtleere Teilmenge eines affinen Raums $\mathbb{A}$ über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(a) Enthält L mit je drei Punkten P_0, P_1, P_2 stets auch deren affine Hülle, so ist L ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$.

(b) Enthält L mit je zwei verschiedenen Punkten P_0 und P_1 stets auch deren Verbindungsgerade P_0P_1 und gilt $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$, so ist L ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$.

(c) In (b) kann auf die Voraussetzung $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$ nicht verzichtet werden.

Aufgabe 3 (K)

Es sei G eine Gruppe, die auf der (nichtleeren) Menge X operiert.

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in X$ der Stabilisator $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ von x eine Untergruppe von G ist.

(b) Es seien $g \in G$ und $x \in X$. Zeigen Sie, dass $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ gilt. Insbesondere sind G_x und G_{gx} isomorph.

(c) Bestimmen Sie den Stabilisator von $N = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^{n-1}$ bezüglich der Operation von $\mathrm{O}(n)$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$ aus Aufgabe 1.

(d) Finden Sie ein Beispiel für eine Gruppenwirkung auf einer Menge, bei der nicht alle Stabilisatoren paarweise isomorph sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (K)

Im affinen Standardraum $\mathbb{A}^4$ sei der affine Unterraum L_1 gegeben als die affine Hülle der Punkte

$$p_0 := \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; p_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Weiter sei L_2 der durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 9x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -4 \, . \end{array}$$

gegebene affine Unterraum von $\mathbb{A}^4$. Berechnen Sie

(a) die Dimension von L_1 und L_2,

(b) den Durchschnitt von L_1 und L_2.