Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (Der Satz von Pappos)

Liegen 6 Punkte aus $\mathbb{A}^2$ abwechselnd auf zwei verschiedenen Geraden, jedoch keiner von ihnen auf beiden gleichzeitig, dann gilt für das dadurch gebildete Sechseck: Sind zwei Paare von Gegenseiten des Sechsecks jeweils parallel, dann auch das dritte Paar.

Aufgabe 2

Es seien $A = \mathbb{A}(V)$ ein 2-dimensionaler reeller affiner Raum und φ die affine Selbstabbildung von A, die bezüglich eines affinen Koordinatensystems $(O; b_1, b_2)$ durch

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist.

(a) Ist φ eine Affinität? Bestimmen Sie die Fixpunkte, Fixrichtungen und Fixgeraden von φ.

(b) Stellen Sie φ bezüglich des affinen Koordinatensystems $(Q; v_1, v_2)$ dar, wobei Q der Fixpunkt und v_1, v_2 die Fixrichtungen sind.

Aufgabe 3 (K)

Es seien $\mathbb{A}(V)$ der zum n-dimensionalen reellen Vektorraum V gehörige affine Raum und φ eine Affinität von $\mathbb{A}(V)$ mit zugehöriger linearer Abbildung Φ. Ferner sei 1 kein Eigenwert von Φ. Zeigen Sie:

(a) φ besitzt genau einen Fixpunkt.

(b) Ist n ungerade, so besitzt φ mindestens eine Fixgerade.

(c) Für $\mathbb{A}(V) = \mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ und $a \in \mathbb{R}$ sei eine affine Abbildung $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax_1 + x_3 + 3 \\ (a-1)x_2 + x_3 + 2 \\ 2x_3 + 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass φ genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden besitzt.

Aufgabe 4 (K)

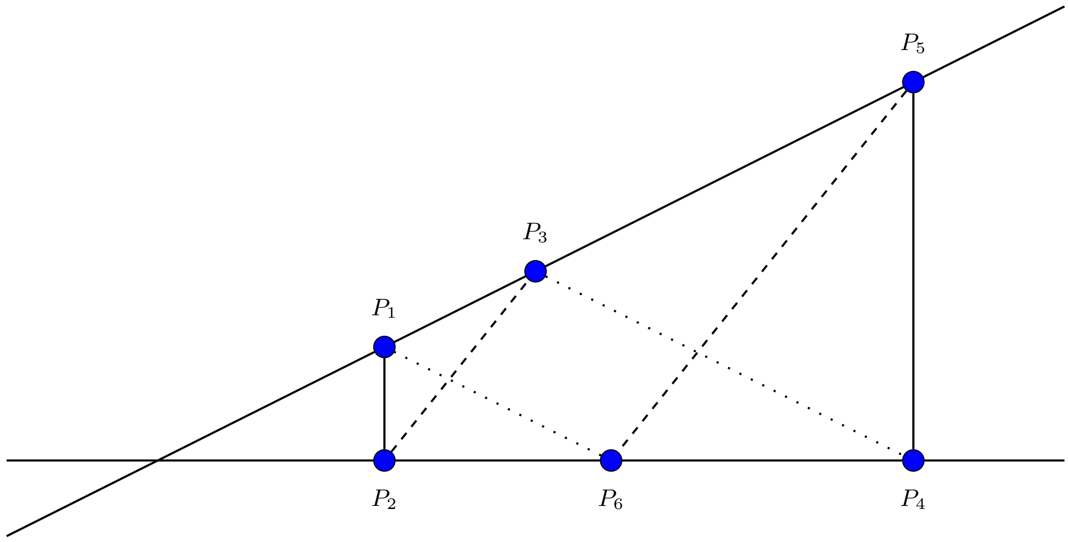
Auf einem n-dimensionalen affinen Raum $A = \mathbb{A}(V)$ sei eine Affinität φ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(a) $\varphi(P) \neq P$ für alle Punkte P von A,

(b) für je zwei Punkte $P, Q \in A$ sind die durch $P, \varphi(P) \in g_1$ und $Q, \varphi(Q) \in g_2$ bestimmten Geraden g_1 und g_2 parallel.

Zeigen Sie, dass φ eine Translation ist.

Skizze zur Aufgabe 1:



Definition zur Aufgabe 2:

Ein Punkt $p \in A$ heißt *Fixpunkt* von φ, wenn $\varphi(p) = p$ gilt.

Eine Gerade $g \subset A$ heißt *Fixgerade* von φ, wenn $\phi(g) = g$ gilt.[1]

Ein Vektor $v \in V$ heißt *Fixrichtung* von φ, wenn er ein Eigenvektor des linearen Anteils Φ von φ ist.

[1] Dies heißt jedoch nicht, dass die Gerade punktweise fixiert wird.