Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie bezüglich des Standardskalarprodukts eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^5$.

(b) Ergänzen Sie die in Teil (a) gefundene Orthonormalbasis zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in V \setminus \{0\}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

(a) $\omega(a, b) = \omega(b, a)$;

(b) $\omega(\alpha a, \beta b) = \begin{cases} \omega(a, b) & \text{für } \alpha\beta > 0 \\ \pi - \omega(a, b) & \text{für } \alpha\beta < 0 \end{cases}$;

(c) $\omega(a, b) = 0 \Leftrightarrow b = \lambda a$ für ein $\lambda > 0$;

(d) $\omega(a, b) = \pi \Leftrightarrow b = \lambda a$ für ein $\lambda < 0$.

Aufgabe 3 (K)

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 3\}$ und $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$ für alle $p, q \in V$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $(V, \langle ., . \rangle)$ und den Abstand $d(x^2 + 1, x^3 + 2x^2 - x + 1)$.

Aufgabe 4 (K)

Es sei $(V, \|.\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es existiert ein Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ auf V, so dass $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ für alle $v \in V$ gilt.

(ii) Für jedes Paar $(v_1, v_2) \in V \times V$ linear unabhängiger Vektoren existieren $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\| = 1\right\} = \left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2 = 1\right\}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 5

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie:

(a) $A \cdot B$ ist symmetrisch genau dann, wenn $AB = BA$.

(b) A ist positiv definit genau dann, wenn A regulär und A^{-1} positiv definit ist.

(c) Ist $A = (a_{ij})$ zusätzlich positiv definit, so existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$a_{kk} = \max \left\{ |a_{ij}| \,\middle|\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Abgabe bis zum **Montag, den 4.5.2015,** 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.