Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Es sei V der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt). Für beliebige $u = (u_1, u_2, u_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in V$ wird das *Vektorprodukt* $u \times w$ definiert durch

$$u \times w := \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2 \\ u_3w_1 - u_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 \end{pmatrix} \in V.$$

a) Zeigen Sie, dass für beliebige $u, w \in V$ gilt:

  (i) $u \times w = -w \times u$

  (ii) $\|u \times w\| = \|u\| \cdot \|w\| \cdot \sin\alpha$. Dabei ist α der Winkel zwischen u und w.

  (iii) $u \times w \perp [u, w]$

b) Es seien $g = x_0 + \operatorname{span}(u)$, $h = y_0 + \operatorname{span}(w)$ zwei nicht parallele Geraden in V. Beweisen Sie die folgende Formel für den Abstand von g und h:

$$d(g, h) = \frac{|\langle x_0 - y_0, u \times w\rangle|}{\|u \times w\|}.$$

c) Berechnen Sie den Abstand folgender Geraden im $\mathbb{R}^3$:

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 (K)

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ (mit Standard-Skalarprodukt) seien der Untervektorraum U und der Vektor v gegeben:

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Orthogonalprojektion $\pi(v)$ von v auf U.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (K)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum, $U \leq V$ ein Untervektorraum und $\pi : V \to V$ eine Projektion von V auf U, also $\pi \circ \pi = \pi$ und $\mathrm{Bild}(\pi) = U$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) π ist die Orthogonalprojektion auf U.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\|.$$

(iii) Für alle $x \in V$ gilt

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|.$$

(iv) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle \pi(x), y \rangle = \langle x, \pi(y) \rangle.$$

Aufgabe 4

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Es seien

$$b_1 = (1,2,3)^\top, \;\; b_2 = (1,1,0)^\top, \;\; b_3 = (0,0,1)^\top \;\text{ und }\; \mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3).$$

Bestimmen Sie die duale Basis $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ und das Bild der Basis unter dem von $\langle .,. \rangle_{\mathrm{Std}}$ induzierten Isomorphismus $\Phi : V \to V^*$.