Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Es sei $A \in \mathrm{SO}(3)$. Wir wollen zeigen, dass A ähnlich ist zu einer Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung heißt die *euklidische Normalform* von A.

Geometrisch bedeutet dies, dass der Eigenraum von A eine Drehachse senkrecht zu einer Ebene ist, in der A eine Drehung um den Winkel α durchführt.

(a) Zeigen Sie $\tilde{A} \in \mathrm{SO}(3)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jedes reelle Polynom vom Grad 3 eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix A den Eigenwert 1 besitzt.

(d) Folgern Sie schließlich, dass A ähnlich zu der angegebenen Matrix $\tilde{A}$ ist (für ein geeignetes α).

Aufgabe 2 (K)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt winkeltreu, falls $\omega(v, w) = \omega(Av, Aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ winkeltreu, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit $\langle Av, Aw \rangle_s = \lambda \langle v, w \rangle_s$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(b) Eine orthogonale Matrix ist winkeltreu.

(c) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann winkeltreu, wenn eine orthogonale Matrix R und ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $A = \mu R$.

Aufgabe 3 (K)

Finden Sie die Iwasawa-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierten Gruppen $\mathrm{B}(n)$ und $\mathrm{N}(n)$ tatsächlich Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ beziehungsweise $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sind.

(b) Es sei $A = TB$ mit $T \in \mathrm{O}(n)$ und $B = (b_{ij}) \in \mathrm{B}(n)$ die Iwasawa-Zerlegung von $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für die Spalten $v_i = Ae_i$ von A gilt: $b_{ii} \leq \|v_i\|$.

(c) Zeigen Sie, dass für A und v_i wie in (b) gilt $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn die Zeilen von A orthogonal sind.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.