Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ aus Eigenvektoren von A und eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(4)$, so dass
$$S^\top AS$$
eine Diagonalmatrix ist.

b) Zeigen Sie, dass es eine Orthogonalbasis $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}$ gibt, für die
$$\langle \tilde{b}_i, A\tilde{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \in \{1,2\} \\ -1, & i = j = 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
gilt (beachten Sie, dass hier *keine* Orthonormalbasis gesucht ist).

c) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass $T^\top AT = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Aufgabe 2

Es sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ selbstadjungierte Endomorphismen von V. Zeigen Sie:

(a) Ist Φ nilpotent, so gilt $\Phi = 0$.

(b) Es gilt $\Phi = \Psi$ genau dann, wenn $\langle \Phi(x), x\rangle = \langle \Psi(x), x\rangle$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 3 (K)

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Zeigen Sie: Φ hat genau dann n verschiedene Eigenwerte, wenn je zwei $\Phi-$invariante Untervektorräume U_1 und U_2 von V mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ orthogonal sind.

Aufgabe 4 (K)

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungierte Abbildungen mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V gibt, so dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sowohl Eigenvektoren von Φ als auch von Ψ sind.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.