Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Es sei $\mathrm{E}(n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist eine Isometrie}\}$ die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{R}^n$ mit der vom Standardskalarprodukt induzierten Metrik. Zeigen Sie:

(a) Ist $\Phi \in \mathrm{E}(n)$ mit $\Phi(0) = 0$, so ist Φ eine lineare Isometrie.

(b) Zu jedem $\Phi \in \mathrm{E}(n)$ existieren eindeutige $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Die Abbildung $\mathrm{E}(n) \to \mathrm{O}(n)$, die jedem $\Phi \in \mathrm{E}(n)$ die Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ aus (b) zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus.

(d) Die Menge der Translationen ist ein Normalteiler von $\mathrm{E}(n)$.

Aufgabe 2

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Finden Sie die darstellenden Matrizen der Spiegelung σ_{a_i} für $a_i = (\cos\beta_i, \sin\beta_i)^\top$, $i = 1, 2$, sowie von $\sigma_{a_2} \circ \sigma_{a_2}$ bezüglich der Standardbasis. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine gegebene Rotation des $\mathbb{R}^2$ als Produkt zweier Spiegelungen darzustellen?

Aufgabe 3 (K)

Es seien V und W euklidische Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$x \perp y \Rightarrow \Phi(x) \perp \Phi(y).$$

b) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|.$$

c) Es gibt eine reelle Zahl $c \geq 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt

$$\|\Phi(x)\| = c\|x\|.$$

d) Φ ist die Nullabbildung, oder es gibt eine lineare Isometrie $\Psi : V \to W$ und eine reelle Zahl $c > 0$ mit $\Phi = c\,\Psi$.

Aufgabe 4 (K)

Es sei Φ ein Automorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V, und $\Phi^\star$ sei die Adjungierte zu Φ. Zeigen Sie:

(a) Die beiden linearen Abbildungen $\Phi^\star \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^\star$ sind selbstadjungiert und haben nur positive Eigenwerte.

(b) $\Phi^\star \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^\star$ haben dieselben Eigenwerte.

(c) Es gibt eine Isometrie Ψ von V mit $\Psi^\star \circ \Phi^\star \circ \Phi \circ \Psi = \Phi \circ \Phi^\star$.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.