Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 7

Ein Endomorphismus $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ eines Vektorraums V mit Skalarprodukt heißt *normal*, wenn er mit seiner Adjungierten kommutiert, also $\Phi^* \circ \Phi = \Phi \circ \Phi^*$ gilt.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für einen normalen Endomorphismus Φ gilt:

(a) $\operatorname{Ker}(F^*) = \operatorname{Ker}(F)$.

(b) Für die Eigenräume von Φ und Φ^* bezüglich λ und $\bar{\lambda}$ gilt $E_\lambda(\Phi) = E_{\bar{\lambda}}(\Phi^*)$.
(Hinweis: Betrachten Sie $\Psi = \Phi - \lambda \operatorname{id}_V$. Ist Ψ normal?)

(c) Zerfällt das charakteristische Polynom von Φ, so existiert eine Orthonormalbasis von V bezüglich der Φ Diagonalgestalt besitzt.

Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus eines Vektorraums mit Skalarprodukt, der bezüglich einer Orthonormalbasis Diagonalgestalt besitzt, normal ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass selbstadjungierte und antiselbstadjungierte Endomorphismen, sowie lineare Isometrien normal sind. Hierbei heißt ein Endomorphismus Φ antiselbstadjungiert, wenn $\Phi^* = -\Phi$ gilt. Was ist ein Beispiel für einen normalen Endomorphismus, der nicht selbstadjungiert, antiselbstadjungiert oder eine Isometrie ist?

Aufgabe 3 (K)

Es sei β die symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$, welche bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Bestimmen Sie die Signatur von β.

Aufgabe 4 (K)

Eine Isometrie Φ eines vierdimensionalen euklidischen Vektorraums V besitze bezüglich einer Orthonormalbasis $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ von V die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & 4 \\ 4\sqrt{3} & -3 & -4 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -4 & 3 & -4\sqrt{3} \\ 4 & 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von Φ.

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis $\widetilde{B}$ von V, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ hat.

(c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S an mit $\widetilde{A} = S^\top A\, S$.
