Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi : V \to V^*, v \mapsto \beta(v, .)$ mit $\beta(v, .) : V \to \mathbb{R}, w \mapsto \beta(v, w)$ ein Isomorphismus ist genau dann, wenn β *nicht ausgeartet* ist, das heißt wenn für den Nullraum N von β gilt $N = \{0\}$.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf positive Definitheit:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \; A_2 := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \; A_3 := \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (K)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die A_α positiv definit ist und finden Sie eine reguläre obere Dreiecksmatrix B mit $A_0 = B^\top B$

Aufgabe 4 (K)

Es seien $r, s \in \mathbb{N}$. Für $i, j = 1, \ldots, r$ seien $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{s\times s}$ schiefsymmetrisch und es gelte $A_{j,i} = -A_{i,j}$. Weiter sei

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & \ldots & A_{r,r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{rs\times rs}$$

die Matrix, die aus den Matrizen $A_{i,j}$ als Blöcken besteht. Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist, und dass gilt: A hat einen negativen Eigenwert genau dann, wenn $A \neq 0$.