Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Lineare Algebra II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen der endlichdimensionalen Vektorräume V und W über dem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ gilt: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}(\Phi^*) = (\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\Phi))^\top$.

(b) Folgern Sie aus (a) die Formel für den Basiswechsel dualer Basen aus der Vorlesung.

(c) Was für einen Zusammenhang gibt es zwischen adjungierter Abbildung und dualer Abbildung von $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ wenn V ein euklidischer Vektorraum ist?

Aufgabe 2

Für $i = 1, 2, 3$ seien V_i und W_i endlichdimensionale reelle Vektorräume. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2,\ (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ ist bilinear.

(b) $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$.

(c) Zu linearen Abbildungen $\Phi_i : V_i \to W_i$, $i = 1, 2, 3$, gibt es genau eine lineare Abbildung $L : V_1 \otimes V_2 \otimes W_3^* \to W_1 \otimes W_2 \otimes V_3^*$ mit $L(v_1 \otimes v_2 \otimes \varphi_3) = \Phi_1(v_1) \otimes \Phi_2(v_2) \otimes \Phi_3^*(\varphi_3)$ für alle $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \varphi_3 \in W_3^*$.

Aufgabe 3 (K)

(a) Es seien V_1, V_2 und V_3 endlichdimensionale reelle Vektorräume. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3)$ gibt.

(b) Es seien $r \leq p \in \mathbb{N}$ $\Phi_i \in \mathrm{End}(V_i)$ diagonalisierbare Endomorphismen endlichdimensionaler reeller Vektorräume $V_1, \ldots, V_p$. Zeigen Sie, dass $\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_r \otimes \Phi_{r+1}^* \otimes \cdots \otimes \Phi_p^*$ diagonalisierbar ist. Was gilt für die Eigenwerte?

(c) Diagonalisieren Sie $\Phi_A \otimes \Phi_A^*$ für $\Phi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\Phi_A(x) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) x$.

Aufgabe 4 (K)

Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem reellen Vektorraum V und jeder bilinearen Abbildung $\beta : V_1 \times V_2 \to V$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : V_1 \otimes V_2 \to V$ mit $\beta(v_1, v_2) = \Phi(v_1 \otimes v_2)$ für alle $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ gibt.

(b) Es sei W ein (endlichdimensionaler) reeller Vektorraum und $\alpha : V_1 \times V_2 \to W$ eine bilineare Abbildung, so dass es zu jedem reellen Vektorraum V und jeder bilinearen Abbildung $\beta : V_1 \times V_2 \to V$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : W \to V$ mit $\beta(v_1, v_2) = \Phi(\alpha(v_1, v_2))$ für alle $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ gibt.
Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $F : W \to V_1 \otimes V_2$ mit $F(\alpha(v_1, v_2)) = v_1 \otimes v_2$ für alle $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ existiert.

Anmerkung: Die Eigenschaft aus (a) heißt auch die *universelle Eigenschaft* des Tensorprodukts. Sie legt nach (b) den Isomorphietyp des Tensorpodukts fest. Ferner ist sogar der Isomorphismus F aus (b) eindeutig bestimmt.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, dem Kürzel Ihres **KIT-Accounts** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.