Folgen und Populationsmodelle

Beispiele

Fakultät für Mathematik | Institut für Algebra und Geometrie

Beispiel 1: Zellen in Nährlösung

Wir starten mit einer Population von $a_0 > 0$. Jede Zelle teilt sich genau einmal bei einem Generationssprung. In der $(n+1)$-ten Generation haben wir damit doppelt so viele Zellen wie in der n-ten Generation.

Dies führt zu der rekursiven Vorschrift:

$$a_{n+1} = 2a_n.$$

Die ersten Folgenglieder sind also

$$a_0, 2a_0, 4a_0, 8a_0, 16a_0, 32a_0, \dots$$

Per Induktion zeigt man, dass $a_n = 2^n a_0$.

Beispiel 1 (Zellen in Nährlösung)

Wir sind am Langzeitverhalten der Population interessiert. Was passiert in diesem simplen Beispiel?

Für jede reelle Zahl $M \in \mathbb{R}$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$2^n a_0 \geq 2^N a_0 > M$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, gilt. Die Folge divergiert also bestimmt gegen unendlich.

$\rightsquigarrow$ Das Modell berücksichtigt nicht, dass eventuelle noch andere Einflüsse, wie Platzmangel eine Rolle spielen, die ein unbeschränktes Wachstum der Population verhindern.

Das Beverton-Holt Modell

- wurde 1957 von Beverton und Holt im Zusammenhang mit Fischpopulationen beschrieben.
- ist das diskrete Analogon zur logistischen Gleichung für das Populationswachstum. $\rightsquigarrow$ Differentialgleichungen am Ende des Semesters

Beispiel 2: Beverton-Holt Modell

Wir nehmen wieder eine Anfangsgeneration von $a_0 > 0$ Individuen an.

Die Rate, mit der die Population von der n-ten zu $(n+1)$-ten Generation wächst, wird diesmal aber von der Größe a_n der n-ten Generation abhängen.

Wir geben weiterhin folgende Größen vor:

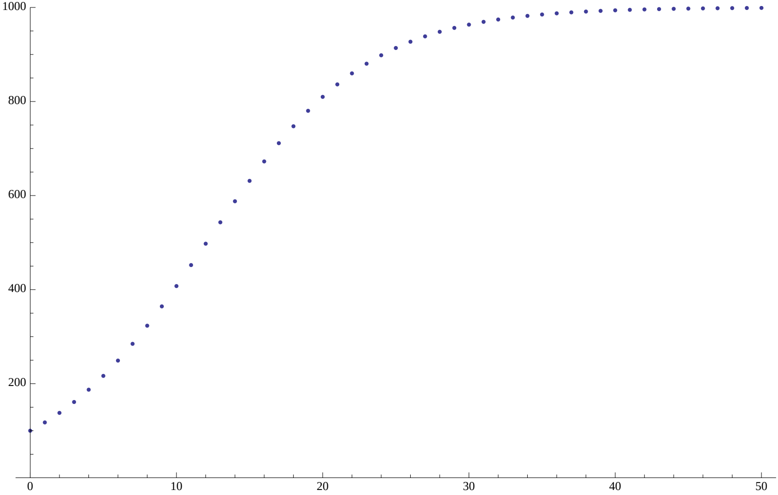
- R_0: Die Grund-Fortpflanzungsrate. Wir nehmen $R_0 > 1$ an.
- K: Diese Größe wird sich später als „Tragfähigkeit der Umwelt“ herausstellen. Wir nehmen $K > 0$ an.

Beispiel 2: Beverton-Holt Modell

- R_0: Die Grund-Fortpflanzungsrate. Wir nehmen $R_0 > 1$ an.
- K: Diese Größe wird sich später als „Tragfähigkeit der Umwelt“ herausstellen. Wir nehmen $K > 0$ an.

Das rekursive Bildungsgesetz sieht wie folgt aus:

$$a_{n+1} = \frac{R_0}{1 + a_n \frac{R_0 - 1}{K}} \cdot a_n$$



Die ersten Folgenglieder von a_n für $R_0 = 1.2$, $K = 1000$ und $a_0 = 100$.

Wir wollen nun ein Verfahren benutzen, dass es ermöglicht „Kandidaten“ für den Grenzwert einer rekursiv definierten Folge zu bestimmen:

Wir nehmen an, dass der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{R_0}{1 + a_n \frac{R_0 - 1}{K}} \cdot a_n \right) \\
&= \frac{R_0}{1 + \lim_{n\to\infty} a_n \frac{R_0 - 1}{K}} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \\
&= \frac{R_0}{1 + a \frac{R_0 - 1}{K}} \cdot a
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die folgende Gleichung für a:

$$a = \frac{R_0}{1 + a\frac{R_0 - 1}{K}} \cdot a$$

Wir lösen nach a auf:

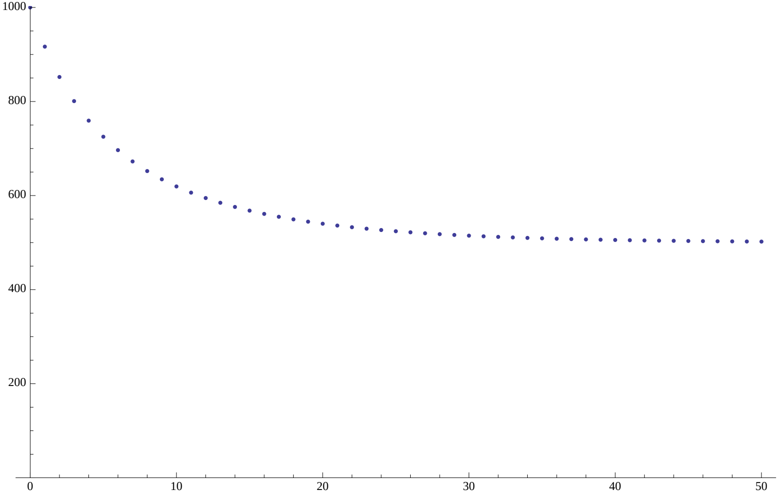
$$\begin{aligned} & a = \frac{R_0}{1 + a\frac{R_0 - 1}{K}} \cdot a \\ \Leftrightarrow \quad & a + a^2 \frac{R_0 - 1}{K} = R_0 a \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 \frac{R_0 - 1}{K} + (1 - R_0) a = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a(a\frac{R_0 - 1}{K} + (1 - R_0)) = 0 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$a = 0 \text{ oder } 0 = a\frac{R_0 - 1}{K} + (1 - R_0) = \frac{R_0 - 1}{K}(a - K),$$

d.h. $a = 0$ oder $a = K$.

Wir wissen also: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist der Grenzwert entweder 0 oder K. Darüber, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wissen wir allerdings noch nichts. Dazu wollen wir jetzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie untersuchen.



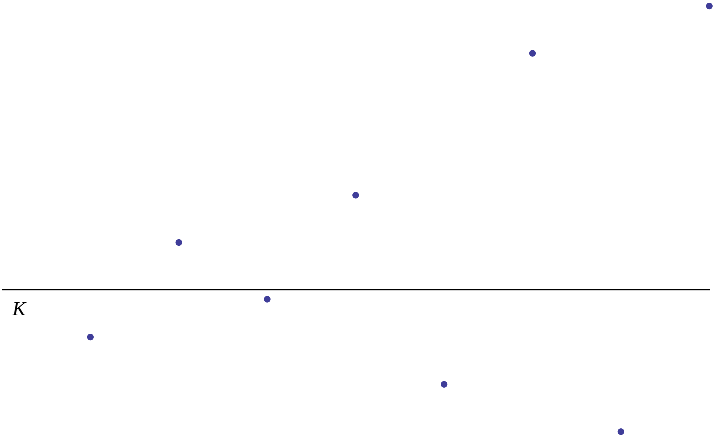
Die ersten Folgenglieder von a_n für $R_0 = 1.1$, $K = 500$ und $a_0 = 1000$.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& a_n > a_{n+1} \\
\Leftrightarrow \quad & a_n > \frac{R_0}{1 + a_n \frac{R_0 - 1}{K}} \cdot a_n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 > \frac{R_0}{1 + a_n \frac{R_0 - 1}{K}} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 + a_n \frac{R_0 - 1}{K} > R_0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_n \frac{R_0 - 1}{K} > R_0 - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & a_n > K
\end{aligned}
$$

Analog zeigt man $(a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n < K)$ und $(a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = K)$.

Könnte auch die folgende Situation auftreten?



Sei $a_n < K$. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \frac{R_0}{1 + a_n \frac{R_0 - 1}{K}} a_n = \frac{R_0}{\frac{1}{a_n} + \frac{R_0 - 1}{K}} < \frac{R_0}{\frac{1}{K} + \frac{R_0 - 1}{K}} = K \frac{R_0}{1 + R_0 - 1} = K.$$

Analog gilt für $a_n > K$, dass

$$a_{n+1} = \frac{R_0}{\frac{1}{a_n} + \frac{R_0 - 1}{K}} > \frac{R_0}{\frac{1}{K} + \frac{R_0 - 1}{K}} = K.$$

Per Induktion folgt hieraus, dass

$$a_n \begin{array}{c} < \\ > \end{array} K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } a_0 \begin{array}{c} < \\ > \end{array} K.$$

Für $a_0 < K$ folgt also, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und durch K nach oben beschränkte Folge ist. Nach Satz 2.14 konvergiert sie also. Da für alle $a_n > a_0 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = K$.

Analog gilt für $a_0 > K$, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende und durch K nach unten beschränkte Folge ist. Nach Korollar 2.15 konvergiert sie also. Da $a_n > K > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = K$.