Lösungsskizzen zur Nachklausur Mathematik I

vom 12.10.2017

Aufgabe 1

Es sei
$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+\mathrm{i}| \leqslant 2 \text{ und } z+\bar{z} < 2 \right\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M in der Gaußschen-Zahlenebene.

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden komplexen Zahlen in M enthalten sind:

(i) $z_1 = (1-\mathrm{i})^2$

(ii) $z_2 = (2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$

(iii) $z_3 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

Lösung

(a) M ist der Schnitt der beiden Mengen
$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+\mathrm{i}| \leqslant 2 \right\}, \qquad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z+\bar{z} < 2 \right\}.$$

Wegen $|z+\mathrm{i}| = |z-(-\mathrm{i})|$ ist M_1 ein abgeschlossener Kreis mit Mittelpunkt $-\mathrm{i}$ und Radius 2.

Wegen $z+\bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ besteht M_2 aus allen komplexen Zahlen mit Realteil kleiner 1, das heißt M_2 ist der Bereich links der horizontalen Geraden $x = 1$.

(b) (i) $z_1 = (1-\mathrm{i})^2 = 1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = -2\mathrm{i}$.

Wegen $|z_1+\mathrm{i}| = |-2\mathrm{i}+\mathrm{i}| = |-\mathrm{i}| = 1 \leq 2$ gilt $z_1 \in M_1$.

Wegen $\operatorname{Re}(z_1) = 0 < 1$ ist $z_1 \in M_2$, also insgesamt $z_1 \in M$.

(ii) $z_2 = (2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2-3\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 1-3\mathrm{i}$.

Wegen $|z_2+\mathrm{i}| = |1-2\mathrm{i}| = \sqrt{1+4} > 2$ liegt z_2 nicht in M_1, also auch nicht in M.

(iii) $z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \cdot \dfrac{1+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \dfrac{1+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}.$

Wegen $|z_3+\mathrm{i}| = |-\dfrac{1}{5}+\dfrac{8}{5}\mathrm{i}| = \dfrac{1}{5}\sqrt{1+64} > 2$ liegt z_3 nicht in M_1, also auch nicht in M.

Aufgabe 2

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl n^3+2n durch 3 teilbar ist.

Lösung

(IA) Für $n = 1$ ist $n^3+2n = 1+2 = 3$ teilbar durch 3.

(IV) Die Aussage gilt für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Wir zeigen, dass die Gültigkeit der Aussage für n auch ihre Gültigkeit für $n+1$ impliziert: Es gilt
$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 2(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1) - 2n - 2 \\ &= n^3 - 2n + (3n^2+3n+3) \\ &= (n^3-2n) + 3(n^2+n+1)\,;\end{aligned}$$

die erste Klammer ist nach Induktionsvoraussetzung durch 3 teilbar, der zweite Term ist als Produkt von 3 mit einer natürlichen Zahl ganz offensichtlich durch 3 teilbar. Da die Summe zweier durch 3 teilbarer Terme durch 3 teilbar ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und geben Sie die Konvergenzkreise an:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n} (x-1)^{2n}$

Lösung

(a) Wir wenden das Quotientenkriterium an: Es gilt

$$\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} \to \infty;$$

der Konvergenzradius ist demnach $\rho = 0$ und der Konvergenzkreis besteht nur aus dem Punkt $x = 0$.

(b) Wir wenden wieder das Quotientenkriterium an: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-(n+1))!} \cdot \frac{n!(2n-n)!}{2n!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})} \to 2 \cdot 2 = 4,\end{aligned}$$

das heißt der Konvergenzradius der Reihe ist $\rho = \frac{1}{4}$. Der Konvergenzkreis ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \frac{1}{4}\}.$$

(c) Wir betrachten zunächst die Hilfsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n} (y-1)^n$ und wenden das Wurzelkriterium an: Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt

$$\sqrt[n]{\frac{9^n}{n}} = \frac{9}{\sqrt[n]{n}} \to 9,$$

das heißt die Hilfsreihe hat Konvergenzradius $\frac{1}{9}$. Die ursprüngliche Reihe hat also Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$; der Konvergenzkreis ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x-1| < \frac{1}{3}\}.$$

Aufgabe 4

Es sei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2,3,5\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x-2}\left(2 - \frac{1}{x-3} + \frac{9}{x-5}\right).$$

Entscheiden Sie, in welchen der Punkte 2, 3 und 5 sich die Funktion f stetig fortsetzen lässt und bestimmen Sie die Werte, welche die stetige Fortsetzung in den jeweiligen Punkten annimmt.

Lösung

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2}\left(2-\frac{1}{x-3}+\frac{9}{x-5}\right) &= \frac{2(x-3)(x-5)-(x-5)+9(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-5)} \\
&= \frac{2x^2-16x+30-x+5+9x-27}{(x-2)(x-3)(x-5)} \\
&= \frac{2x^2-8x+8}{(x-2)(x-3)(x-5)} \\
&= \frac{2(x-2)^2}{(x-2)(x-3)(x-5)} = \frac{2(x-2)}{(x-3)(x-5)}
\end{aligned}$$

Die Funktion lässt sich also in den Punkten 3 und 5 nicht stetig fortsetzen, da sie dort Polstellen besitzt. Im Punkt 2 hingegen lässt sich die Funktion stetig fortsetzen durch den Wert $\frac{2(2-2)}{(2-3)(2-5)} = 0$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital und begründen Sie dabei jeweils, warum Sie diese anwenden dürfen:

(a) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{5x}}$

(b) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\cos(x)-\mathrm{e}^x}{\sin(x)}$

Lösung

(a) Da sowohl Zähler als auch Nenner auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar sind mit Grenzwert 0 für $x \to 0$, folgt nach der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{5x}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{(1-\mathrm{e}^x)'}{(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{5x})'} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{-\mathrm{e}^x}{3\mathrm{e}^{3x}-5\mathrm{e}^{5x}} = \frac{-1}{3-5} = \frac{1}{2}.$$

(b) Da sowohl Zähler als auch Nenner auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar sind mit Grenzwert 0 für $x \to 0$, folgt nach der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\mathrm{e}^{x^2}-1} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{(\ln(1+x^2))'}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)'} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(c) Da sowohl Zähler als auch Nenner auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar sind mit Grenzwert 0 für $x \to 0$, folgt nach der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\cos(x)-\mathrm{e}^x}{\sin(x)} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{(\cos(x)-\mathrm{e}^x)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin(x)-\mathrm{e}^x}{\cos(x)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Aufgabe 6

Es sei

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln(x^4-2x^2+2)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion f und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um eine Maximal- oder Minimalstelle handelt.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung

(a) Wir berechnen zunächst die ersten beiden Ableitungen von f. Mit der Ketten- bzw. Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{x^4-2x^2+2}\cdot(4x^3-4x) = \frac{4x(x^2-1)}{x^4-2x^2+2},$$
$$f''(x) = \frac{(12x^2-4)(x^4-2x^2+2)-(4x^3-4x)(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2}$$

Kandidaten für lokale Extremstellen sind die Nullstellen der Ableitung f', das heißt die Punkte 0, 1 und -1.

Wegen $f''(0) = \frac{(-4)\cdot 2-0}{2} = -4 < 0$ handelt es sich bei $x = 0$ um eine lokale Maximalstelle mit Wert $f(0) = \ln(2)$.

Weiter ist $f''(\pm1) = \frac{8\cdot1-0}{1} = 8 > 0$, das heißt die Punkte $x = 1$ und $x = -1$ sind lokale Minimalstellen jeweils mit Wert $f(\pm1) = \ln(1) = 0$.

(b) Wegen $\ln(y) \to \infty$ für $y \to \infty$ und $x^4 - 2x^2 + 2 \to \infty$ für $x \to \infty$ gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$$

Der Funktionsgraph von f ist symmetrisch und verläuft komplett oberhalb der x-Achse (mit zwei Berührungen an den lokalen Minimalstellen $x = -1$ und $x = 1$). Das lokale Maximum mit Wert $\ln(2)$ liegt auf der y-Achse (der Symmetrieachse).

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und berechnen Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis/Erinnerung: Es gelten $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Lösung

Es gilt $f'(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x)$, das heißt

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1,\ f'(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f''(\frac{\pi}{2}) = -1,\ f'''(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist also gegeben durch

$$1+\frac{0}{1!}(x-\frac{\pi}{2})+\frac{-1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{0}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4\frac{0}{5!}(x-\frac{\pi}{2})^5-\frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4-\frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k!}(x-\frac{\pi}{2})^{2k}.$$

Um den Konvergenzradius zu berechnen, wenden wir das Quotientenkriterium an: Es gilt

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)!}}{\frac{(-1)^k}{2k!}}\right| = \frac{2k!}{2(k+1)!} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} \to 0 \quad (k\to\infty),$$

das heißt die Taylorreihe hat Konvergenzradius ∞.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\mathrm{d}x$

Lösung

(a) Wegen $\dfrac{x(x^2+1)}{x^4+2x^2+1} = \dfrac{x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x}{x^2+1}$ gilt

$$\int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\big(\ln(2)-\ln(1)\big) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

(b) Setzt man $f' = \mathrm{e}^x$, $g = \cos(x)$, so erhält man durch partielle Integration

$$\int \cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \cos(x)\mathrm{e}^x - \int (-\sin(x))\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

Weitere partielle Integration des letzten Terms liefert

$$\int \cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \cos(x)\mathrm{e}^x + \sin(x)\mathrm{e}^x - \int \cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,$$

das heißt

$$\int \cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\cos(x)\mathrm{e}^x + \sin(x)\mathrm{e}^x\big) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\big(\cos(x)+\sin(x)\big).$$

Somit ergibt sich

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-\pi/2}\cdot(-1) - \mathrm{e}^{\pi/2}\cdot 1\big) = -\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-\pi/2}+\mathrm{e}^{\pi/2}\big).$$

(c) Hier wenden wir ebenfalls partielle Integration an mit $f = \ln(x)$ und $g = x^2$. Es ergibt sich

$$\int x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C.$$