Lösungsskizzen zur Klausur Mathematik II

vom 12.10.2017

Aufgabe 1

Es sei die Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E an.

(b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\Pi_E(p)$ des Punktes $p = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ auf die Ebene E.

Lösung

ad (a): Es bezeichnen $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Basispunkt und $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Richtungsvektoren der Ebene E.

Man sieht leicht ein, dass $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein zu den beiden Richtungsvektoren orthogonaler Vektor ist. Der durch den Kehrwert seiner Norm $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ skalierte Vektor $n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bildet also den Normaleneinheitsvektor der Ebene E.

Mit dem Abstand $\langle n, a \rangle = \frac{1}{5}(6 + 0 + 0) = \frac{6}{5}$ der Ebene E zum Ursprung erhält man die Hesse-Normalform der Ebene E:

$$\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, x \rangle = \frac{6}{5}$$

ad (b): Für die orthogonale Projektion gilt:

$$\Pi_E(p) = p + \langle a - p, n \rangle n = \ldots = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Es sei, in Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$, das folgende inhomogenen lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & t \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_\mathrm{h}$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(b) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Lösung

An der Gauß-Normalform der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & t \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{array}\right)$$

sieht man einerseits, dass der Rang der Matrix gleich zwei, und damit die Dimension des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems gleich eins ist, und andererseits, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem nur für $t = -1$ lösbar ist, dann nämlich, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Matrix, also gleich zwei ist.

ad (a): Mit der Gauß-Normalform sieht man schnell ein, dass $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems ist. Für den Lösungsraum gilt also:

$$\mathcal{L}_\mathrm{h} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ad (b): Wiederum an der Gauß-Normalform sieht man, dass $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ im Falle $t = -1$ eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems ist, und damit auch $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für den Lösungsraum gilt:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} & \text{falls } t = -1 \\ \varnothing & \text{falls } t \neq -1 \end{cases}$$

Aufgabe 3

Für $w \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\Phi_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto w \times v,$$

wobei $\times$ das Kreuzprodukt zweier Vektoren bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung Φ_w für beliebiges $w \in \mathbb{R}^3$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie für $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix von Φ_w (bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$).

Lösung

ad (a): Es gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Phi_w(u+v) = w \times (u+v) = (w \times u) + (w \times v) = \Phi_w(u) + \Phi_w(v)$$
$$\Phi_w(\lambda v) = w \times (\lambda v) = \lambda (w \times v) = \lambda \Phi_w(v)$$

und damit ist Φ_w eine lineare Abbildung.

ad (b): Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix A von Φ_w bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sind genau die Bilder der Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 unter der Abbildung Φ_w. Es gilt

$$\Phi_w(e_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}, \ \Phi_w(e_2) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \text{ und } \Phi_w(e_3) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \Big(\Phi_w(e_1)\ \Phi_w(e_2)\ \Phi_w(e_3)\Big) = \begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\3 & 0 & -1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2\end{pmatrix}$$

und es bezeichne $U = [v_1, v_2, v_3]$ den von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Untervektorraum.

(a) Entscheiden Sie, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes U (bzgl. des Standardskalarproduktes des $\mathbb{R}^4$).

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplementes $U^\top$ (bzgl. des Standardskalarproduktes des $\mathbb{R}^4$).

Lösung

ad (a): Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind genau dann linear unabhängig, wenn sich das lineare Gleichungssystem $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$, also

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 0\\ x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0\\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0\\ -x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

nur trivial lösen lässt. In der Tat liefert die erste Gleichung sofort $x_1 = 0$ und damit folgen aus der zweiten bzw. vierten Gleichung sowohl $x_2 = 0$ als auch $x_3 = 0$. Damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

ad (b): In dem Untervektorraum U sind mit den Vektoren v_1, v_2, v_3 auch alle ihre Linearkombinationen enthalten. Insbesondere sieht man für

$$b_1 = v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \ b_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

schnell ein, dass sie linear unabhängige paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind, also eine Orthonormalbasis von U bilden.

Alternative: Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren.

ad (c): Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im orthogonalen Komplement $U^\top$, wenn w orthogonal zu allen Elementen einer Basis von U ist, wenn also gilt: $\langle w, b_1\rangle = \langle w, b_2\rangle = \langle w, b_3\rangle = 0$. Für ein solches w folgt damit:

$$0 = \langle w, b_1\rangle = w_1\,, \quad 0 = \langle w, b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_3 - w_2) \quad \text{und} \quad 0 = \langle w, b_3\rangle = -w_4$$

also

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U^\top$ eindimensional und z.B. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende homogene System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1'(t) & = & 5y_1(t) & - & 7y_2(t) \\ y_2'(t) & = & 2y_1(t) & - & 4y_2(t) \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung

ad (a): Zur Bestimmung eines Fundamentalsystemes berechnet man zunächst die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

als die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -7 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 14 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$. Basisvektoren der zugehörigen Eigenräume erhält man beispielsweise durch Anwenden des Gauß-Algorithmus auf die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 5-(-2) & -7 \\ 2 & -4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -7 \\ 2 & -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ resp. Die Abbildungen der Form $u_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} v_i$, also

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden somit ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

ad (b): Durch Lösen des durch die Anfangsbedingung

$$y(0) = c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

erhält man mit $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$ die Lösung

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

des Anfangswertproblems.

Aufgabe 6

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^t$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$u_1(t) = \mathrm{e}^t\,,\ u_2(t) = t\mathrm{e}^t\,,\ u_3(t) = \mathrm{e}^{2t}$$

ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung

ad (a): Die Funktionen u_1, u_2 und u_3 bilden genau dann ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, wenn 1 eine doppelte und 2 eine einfache Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms $q(r)$ sind. In der Tat gilt:

$$(r-1)^2(r-2) = r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = q(r)$$

ad (b): Mit dem Ansatz $y_p(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t) + c_3(t)u_3(t)$ bestimmt man zunächst die Ableitungen der Koeffizientenfunktionen durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ \mathrm{e}^t & (1+t)\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ \mathrm{e}^t & (2+t)\mathrm{e}^t & 4\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right)$$

und erhält durch Integration die Koeffizientenfunktionen

$$c_1(t) = \int s - 1\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 - t\,, \quad c_2(t) = \int -1\,\mathrm{d}s = -t\,, \quad c_1(t) = \int \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = -\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Damit ist
$$y_p(t) = \big(\frac{1}{2}t^2 - t\big)e^t - t^2e^t - e^{(2t-t)} = \big(\frac{1}{2}t^2 - t - 1\big)e^t$$
eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Aufgabe 7

Es sei
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto y^3 + 6x^2 + 6y^2 - x\,.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremstellen und Sattelpunkte.

Lösung

Die kritischen Punkte der Funktion sind genau die Nullstellen des Gradienten
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x-1 \\ 3y^2+12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\big(x-\frac{1}{12}\big) \\ 3y(y+4) \end{pmatrix},$$

also die beiden Punkte $\xi_1 = \big(\frac{1}{12}, 0\big)$ und $\xi_2 = \big(\frac{1}{12}, -4\big)$. Betrachtet man nun die Hesse-Matrix
$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6y+12 \end{pmatrix}$$
in den kritischen Punkten
$$\mathrm{H}_f(\xi_1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_f(\xi_2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$

so stellt man fest, dass in ξ_1 eine Minimalstelle vorliegt, da $\mathrm{H}_f(\xi_1)$ mit den zwei positiven Eigenwerten auf der Diagonalen positiv definit ist, und f in ξ_2 einen Sattelpunkt besitzt, da $\mathrm{H}_f(\xi_2)$ mit den zwei nicht verschwindenden Eigenwerten unterschiedlicher Vorzeichen auf der Diagonalen indefinit ist.

Aufgabe 8

Entscheiden Sie, welche der folgenden Vektorfelder Potentialfelder sind und bestimmen Sie ggf. ein Potential:

(a) $V:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2y \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}$

(b) $W:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(y) + y\cos(x) \\ \sin(x) - x\sin(y) + e^y \end{pmatrix}$

Lösung

ad (a): Das Vektorfeld V ist kein Potentialfeld, denn wegen
$$\partial_1 V_2 = \frac{\partial}{\partial x} xz^2 = z^2 \neq x^2 = \frac{\partial}{\partial y} x^2 y = \partial_2 V_1$$

ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt.

ad (b): Integriert man die erste Komponente von W

$$f(x,y) = \int W_1(x,y)\mathrm{d}x = \int \cos(y) + y\cos(x)\mathrm{d}x = x\cos(y) + y\sin(x) + h(y)\,,$$

so ergibt sich aus

$$-x\sin(y) + \sin(x) + h'(y) = \partial_y f(x,y) = W_2(x,y) = \sin(x) - x\sin(y) + e^y$$

mit

$$h'(y) = \mathrm{e}^y \text{ und } h(y) = \int h' = \mathrm{e}^y$$

ein Potential

$$f(x,y) = x\cos(y) + y\sin(x) + \mathrm{e}^y$$

für das Vektorfeld W. Insbesondere ist W also ein Potentialfeld.