Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie — **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 1 — **25.04.18**

Die drei Regeln der Zentralperspektive lauten:

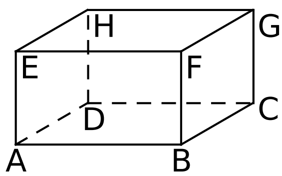
i) (Teilstücke von) Geraden im Raum werden auf (Teilstücke von) Geraden abgebildet.

ii) Das Bild einer Schar paralleler Geraden im Raum ist entweder eine Schar paralleler Geraden oder eine Schar von Geraden durch einen festen Punkt. Im zweiten Fall nennt man den gemeinsamen Schnittpunkt *Fluchtpunkt* dieser Schar.

iii) Für mehrere Paare paralleler Geraden, die alle in einer Ebene liegen, liegen die Fluchtpunkte (sofern existent) auf einer Geraden, dem *Horizont* dieser Ebene.

Außerdem gilt: Mehrere parallele Ebenen im Raum haben im Bild denselben Horizont.

Aufgabe 1 *(Perspektivische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal)*
Gegeben sei ein Quader in $\mathbb{R}^3$ mit Eckpunkten $A, \ldots, H$.
Die Skizze zeigt den Quader in Parallelprojektion.



a) Konstruieren Sie (mit Lineal) ein Bild des Quaders in Zentralprojektion, in der nur die Seiten $ABFE$ und $BCGF$ sichtbar sind. Die Bilder der Kanten AE, BF, CG sollen zueinander parallel sein, alle anderen sichtbaren Kanten sollen nicht parallel sein.

Zeichnen Sie die Fluchtpunkte der Kanten und den Horizont ein. Wie kann man nun die verdeckten Ecken D und H konstruieren?

b) Erstellen Sie ein neues Bild wie in a) und konstruieren Sie die verdeckten Kanten und Ecken. Konstruieren Sie die Fluchtpunkte der Geradenpaare (AF, DG) und (EB, HC).

Die Verbindungsgerade dieser beiden Fluchtpunkte ist der Horizont der Ebene, in der die Seite $ABFE$ liegt. Überzeugen Sie sich in ihrem Bild davon, dass dieser Horizont auch durch den Fluchtpunkt des Geradenpaars (AB, EF) geht und parallel zu den Kanten AE, BF, CG ist.

c) Konstruieren Sie ein weiteres Bild, in dem drei Seiten des Quaders zu sehen sind, und in dem die Bilder der Kanten des Quaders paarweise nicht parallel zueinander sind. Dafür brauchen Sie drei Fluchtpunkte. Aus welchem Blickwinkel zeigt das Bild den Quader?

Aufgabe 2 *(Zentralprojektion im Raum)*
Gegeben sei eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ (Bildebene) und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^3 \backslash E$ (Projektionszentrum). Für einen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ sei $\pi(Q)$ der Schnittpunkt der Gerade PQ mit der Ebene E, falls dieser existiert. $U \in \mathbb{R}^3$ sei die Menge aller Punkte, für die $\pi(Q)$ existiert. Dies macht π zu einer Abbildung

$$\pi\colon U \to E.$$

a) Sei zunächst $P = (0,0,0)^T$ und $E = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = 1\right\}$. Bestimmen Sie die Menge U und die Koordinaten von $\pi(Q)$ für $Q = (x,y,z)^T \in U$.

In den Teilaufgaben b) und c) können Sie entweder elementar geometrisch argumentieren oder mit diesem Spezialfall rechnen.

b) Was ist das Urbild $\pi^{-1}(Q)$ eines Punktes $Q \in E$? Zeigen Sie: Jede Gerade $g \subset \mathbb{R}^3$, die parallel zur Geraden PQ ist, wird auf eine Gerade durch Q abgebildet. (d.h. das Bild $\pi(g \cap U)$ liegt in einer Geraden durch Q).

c) Wie können Sie das Ergebnis aus b) nutzen, um zu einer beliebigen Gerade $g \subset \mathbb{R}^3$ den Fluchtpunkt zu konstruieren, falls er existiert? Welche parallelen Geraden in $\mathbb{R}^3$ werden von π wieder auf parallele Geraden abgebildet?

d) Zeigen Sie, dass auch Regel iii) gilt, indem Sie zu einer Ebene im Raum den zugehörigen Horizont bestimmen.

Aufgabe 3 *(Sphären und projektive Räume)*

a) Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume homöomorph zueinander sind:

$$\begin{aligned} S^n_{(1)} &:= \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1 \right\}, \\ S^n_{(2)} &:= \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}\right) \Big/ \left(\mathbb{R}^{>0}\right), \\ S^n_{(3)} &:= \left(D^n \coprod D^n\right) \Big/ \sim . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $D^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ die abgeschlossene n-dimensionale Scheibe bzw. Ball und $\sim$ setzt einander entsprechende Punkte auf den Rändern der beiden Kopien von D^n in Relation.

b) Zeigen Sie dass die topologischen Räume

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^n_{(1)} &:= S^n_{(1)} \Big/ \{1, -1\} \\ \mathbb{R}P^n_{(2)} &:= \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}\right) \Big/ (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \\ \mathbb{R}P^n_{(3)} &:= D^n \big/ \backsim \end{aligned}$$

homöomorph zueinander sind und von der Sphäre $S^n_{(i)}$ zweifach überlagert werden.
Dabei setzt $\backsim$ jeden Punkt $v \in \partial D^n$ mit seinem Antipodalpunkt $-v \in \partial D^n$ in Relation.

c) Gegeben seien die vier komplexen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{C}^{2\times 2} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 I \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Sphäre $S^3_{(1)}$ von Φ homöomorph auf $\mathrm{SU}(2) \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ abgebildet wird.
(Hinweis: Benutzen Sie $A^2 = B^2 = C^2 = ABC = -I$, $AB + BA = 0, \dots$)

Abgabe bis Freitag, den 04.05.18 um 11:30 in der Übung.