Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 2 **03.05.18**

Aufgabe 1 *(Gruppenwirkungen und Transitivität)*

Es sei G eine Lie-Gruppe, die glatt auf einer glatten Mannigfaltigkeit M wirkt.

a) Es sei $p \in M$ ein fester Punkt und $K = G_p$ dessen Stabilisator. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon {}^{G}\!/_{K} &\to M \\ gK &\mapsto gp \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv ist. Zeigen Sie, dass Φ genau dann bijektiv ist, wenn die Gruppenwirkung transitiv ist. Im Folgenden können Sie ohne Beweis verwenden, dass Φ in diesem Fall sogar ein Diffeomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass für $g \in G$ und $p \in M$ die Stabilisatoren der Punkte p und gp isomorph sind.

c) Geben Sie für $M = S^n$ jeweils eine transitive Gruppenwirkung von

i) $G = \mathrm{O}(n+1)$
ii) $G = \mathrm{SO}(n+1)$
iii) $G = \mathrm{U}((n+1)/2)$ falls n ungerade

an und bestimmen Sie jeweils den Stabilisator eines von Ihnen gewählten Punktes.

Aufgabe 2 *(Prinzipalbündel aus Gruppenwirkungen)*

Es sei G eine Lie-Gruppe (*Strukturgruppe* bzw. *Faser*), die glatt und frei auf einer glatten Mannigfaltigkeit E (*Totalraum*) wirkt, sodass $B = {}^{E}\!/_{G}$ (*Grundraum*) ebenfalls eine Mannigfaltigkeit ist. Dann nennt man E ein *(glattes) G-Prinzipalbündel über B*.

a) Zeigen Sie, dass alle Bahnen der Gruppenwirkung in E abgeschlossen und diffeomorph zu G sind.

b) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ durch Multiplikation auf $E = S^{2n+1} = \left\{v \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \|v\| = 1\right\}$ die Bedingungen der Aufgabe mit $B = \mathbb{C}P^n$ erfüllt (Hopf-Faserung).

c) Zeigen Sie, dass S^2 homöomorph zu $\mathbb{C}P^1$ ist. (Hinweis: Benutzen Sie, dass S^2 homöomorph zu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist.)

Tatsächlich ist dies sogar ein Diffeomorphismus (ohne Beweis). Zusammen mit der letzten Teilaufgabe ist S^3 also ein S^1-Prinzipalbündel über S^2.

d) Zeigen Sie, dass für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Stiefel-Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{St}_k(K^n) = \{(v_1, \dots v_k) \mid v_i \in K^n, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}$$

ein Prinzipalbündel über der Grassmann-Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{Gr}_k(K^n) = \{U \leq K^n \text{ Untervektorraum} \mid \dim(U) = k\}$$

ist. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt in K^n.

Aufgabe 3 *(Ein Gegenbeispiel)*

Für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir folgende Gruppenwirkung von $\mathbb{R}$ auf dem Torus $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times T^2 &\to T^2 \\ (z, x + \mathbb{Z}^2) &\mapsto x + \begin{pmatrix} z \\ \alpha z \end{pmatrix} + \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

a) Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ rational. Bestimmen Sie den Stabilisator eines Punktes $p \in T^2$. Ist die Gruppenwirkung effektiv?

b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nun irrational. Zeigen Sie, dass die Gruppenwirkung frei ist. Zeigen Sie, dass alle Bahnen dicht in T^2 liegen und nicht abgeschlossen sind. Ist $T^2 / \mathbb{R}$ eine Mannigfaltigkeit?

Abgabe bis Freitag, den 11.05.18 um 11:30 in der Übung.