Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 3 **18.05.18**

Aufgabe 1 *(Quadratische Formen)*

a) Diagonalisieren Sie die quadratische Form

$$g\left(\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\right) = v^2 + 2avw + bw^2$$

durch quadratische Ergänzung, d.h. drücken Sie g in neuen Variablen $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ aus, die linear von v und w abhängen, sodass $g((v,w)) = \tilde{v}^2 \pm \tilde{w}^2$ gilt. Für welche Werte won a, b ist dies möglich und für welche Werte von a, b ist g positiv definit? (Hinweis: Quadratische Ergänzung zu $\tilde{v} = v + aw$)

b) Beschreiben Sie wie man das in a) benutzte Verfahren verallgemeinern kann, um eine allgemeine quadratische Form

$$g(v) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} g_{ij}\, v_i\, v_j$$

auf die Form

$$g(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \tilde{v}_i^2(v)$$

zu bringen, wobei $\tilde{v}_i^2(v)$ linear von v abhängt und $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ gilt.

Aufgabe 2 *(Ableitungen der riemannschen Metrik in Normalkoordinaten)*

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n, 0 \in U$ eine offene Menge von Koordinatenvektoren einer riemannschen Mannigfaltigkeit. Darauf ist eine riemannsche Metrik gegeben durch eine positive quadratische Form bzw. dem dadurch induzierten Skalarprodukt

$$g_x(v) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, v_i\, v_j \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und } v \in \mathbb{R}^n$$

$$g_x(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, v_i\, w_j \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist $g_{ij}(x)$ eine vom Ortsvektor x abhängige symmetrische Matrix. In riemannschen Normalkoordinaten gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, g_{ij}(x) = x_j \qquad \text{für alle } x \in U, j \in \{1, \dots n\}.$$

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Im Folgenden benutzen wir die abkürzende Notation

$$g_{ij} := g_{ij}(x), \quad g_{ij,k} := \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_k}, \quad g_{ij,kl} := \frac{\partial^2 g_{ij}(x)}{\partial x_k \partial x_l} \quad \text{usw.}$$

Wenn nichts anderes gesagt ist, sollen Gleichungen immer für alle $x \in U$ und alle Indizes $1, \dots n$ gelten.
Zeigen Sie, dass in riemannschen Normalkoordinaten folgende Aussagen gelten:

$$\begin{array}{rrl}
i) & g_{kj} + \sum_i x_i \, g_{ij,k} = \delta_{kj} & \\
ii) & g_{kj,l} + g_{lj,k} + \sum_i x_i \, g_{ij,kl} = 0 & \\
iii) & g_{kj,lm} + g_{lj,km} + g_{mj,kl} + \sum_i x_i \, g_{ij,klm} = 0 & \\
iv) & g_{kj} = \delta_{kj} & \text{an der Stelle } x = 0 \\
v) & g_{kj,l} + g_{lj,k} = 0 & \text{an der Stelle } x = 0 \\
vi) & g_{kj,lm} + g_{lj,km} + g_{mj,kl} = 0 & \text{an der Stelle } x = 0
\end{array}$$

Aufgabe 3 *(Riemannscher Krümmungstensor)*

In der Situation von Aufgabe 2 sind die zweiten Ableitungen symmetrisch in den beiden Indexpaaren:

$$g_{ij,kl} = g_{ji,kl} = g_{ij,lk} = g_{ji,lk}$$

Zeigen Sie, dass man auch blockweise vertauschen darf, also in riemannschen Normalkoordinaten

$$g_{ij,kl} = g_{kl,ij}$$

an der Stelle $x = 0$ gilt.
Folgern Sie daraus, dass es Koeffizienten R_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, \dots n$ gibt, die

$$\sum_{i,j,k,l} g_{ij,kl}(0) \, \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j \delta x_k \delta x_l = -\frac{1}{6} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} \Delta x_{ij} \Delta x_{kl}$$

mit

$$\Delta x_{ij} := \mathrm{d}x_i \delta x_j - \mathrm{d}x_j \delta x_i$$

für alle $\mathrm{d}x, \delta x \in \mathbb{R}$ erfüllen. Zeigen Sie weiterhin, dass man R_{ijkl} so wählen kann, dass die Vertauschungsrelationen $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk}$ erfüllt sind.

Abgabe bis Freitag, den 26.05.18 um 11:30 in der Übung.