Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 4 **25.05.18**

Aufgabe 1 *(Eigenschaften von Bilinearformen)*

Es sei $g\colon V \times V \to V$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Die *Fundamentalmatrix* von g bezüglich einer Basis $b_1, \ldots b_n$ von V ist die Matrix $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen $g_{ij} = g(b_i, b_j)$.
Zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ ist der *orthogonale Unterraum* $U^\perp$ gegeben durch

$$U^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in U\colon g(v,w) = 0\}$$

Der *Ausartungsraum* von g ist dann der zu ganz V orthogonale Unterraum $V^\perp$.
Falls $V^\perp = \{0\}$ gilt, nennt man g ein *Pseudoskalarprodukt*.

a) Zeigen Sie, dass jede Bilinearform g eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} g^*\colon V &\to V^* \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} V & \to \mathbb{R} \\ w & \mapsto g(v,w) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

von V in den Dualraum V^* induziert, deren Kern genau der Ausartungsraum $V^\perp$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\dim(U^\perp) \geq \dim(V) - \dim(U)$ für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt. (Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für eindimensionale Unterräume und benutzen Sie, dass $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ für alle Untervektorräume $U, W \subseteq V$ gilt.)

c) Zeigen Sie: Falls U eine Basis $u_1, \ldots u_k$ hat, die $g(u_i, u_i) \neq 0$ und $g(u_i, u_j) = 0$ für alle $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots k$ erfüllt, dann ist $U^\perp$ komplementär zu U (also $U \cap U^\perp = \{0\}$ und $U + U^\perp = V$).

d) Zeigen Sie, dass es eine Basis gibt, in der die Fundamentalmatrix diagonal ist und alle Diagonalelemente die Werte 1, -1 oder 0 annehmen.

Bemerkung: Die Anzahlen der Werte $1, -1, 0$ auf der Diagonalen in Teilaufgabe d) bilden die *Signatur* von g. Die Signatur hängt nach dem Trägheitssatz von Sylvester nicht von der Wahl der Basis ab.

Aufgabe 2 *(Lorentztransformationen)*

Es seien p, q, n positive ganze Zahlen mit $p + q = n$ und g sei das Pseudoskalarprodukt mit Fundamentalmatrix

$$G = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann nennt man die Liegruppe

$$\mathrm{O}(p,q) = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \forall x, y \in V\colon g(Ax, Ay) = g(x,y)\right\} = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, A^T G A = G\right\}$$

die *Invarianz-Gruppe von g*. Eine wichtige Lie-Untergruppe davon ist

$$\mathrm{SO}(p,q) = \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}).$$

a) Zeigen Sie für $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(p,q)$, dass die Teilmatrizen $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $A_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ regulär sind. (Hinweis: Was passiert mit einem Vektor $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $v \in \mathrm{Kern}(A_{11})$?)

b) Wegen a) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{\det} \colon \mathrm{O}(p,q) &\to \{-1,1\} \times \{-1,1\} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} &\mapsto (\mathrm{sign}(\det(A_{11})), \mathrm{sign}(\det(A_{22}))) \end{aligned}$$

definiert und stetig. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\det}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

c) Das Urbild $\mathrm{SO}^+(p,q) := \widetilde{\det}^{-1}(1,1)$ ist wegzusammenhängend.

Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{O}(p,q)$ vier Zusammenhangskomponenten und $\mathrm{SO}(p,q)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat. Zeigen Sie außerdem, dass alle Zusammenhangskomponenten diffeomorph zueinander sind. (Bemerkung: Die letzte Aussage gilt in allen Lie-Gruppen.)

Aufgabe 3 *(Zwillingsparadoxon)*

Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$ lässt durch eine einzige Karte beschreiben (nämlich $\mathrm{id} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Dadurch gibt es in allen Tangentialräumen eine kanonische Basis $\partial_1, \ldots, \partial_n$ und die Tangentialräume lassen sich mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Versieht man die Tangentialräume mit dem in Aufgabe 2 gegebenen Pseudoskalarprodukt mit $p = 1, q = 3$, nennt man die Mannigfaltigkeit den Minkowski-Raum.

a) Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Zusammenhang im Minkowski-Raum durch

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass alle Geodätischen "gerade Linien" $\gamma(t) = x + tv$ mit $x, v \in \mathbb{R}^n$ sind.

b) Angenommen, die Erde bewegt sich auf der Geodätischen $\gamma_1(t) = (t, 0, 0, 0)$ und ein Raumschiff auf der stückweise geodätischen Kurve

$$\begin{aligned} \gamma_2 \colon [0,2] &\to \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \begin{cases} 0 + t\, v_1 & , 0 \le t \le 1 \\ v_1 + (t-1) v_2 & , 1 \le t \le 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Dabei seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $g(v_1, v_1) = g(v_2, v_2) > 0$ und $\gamma_2(2) = \gamma_1(2)$ gilt.

Bestimmen Sie die Zeit

$$\int_1^2 \sqrt{g(\gamma_i'(t), \gamma_i'(t))}\, \mathrm{d}t,$$

die aus Sicht der Erde und des Raumschiffes vergeht. Welche Zeit ist länger?

Abgabe bis Freitag, den 01.06.18 um 11:30 in der Übung.