Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 5 **08.06.18**

Aufgabe 1 *(Rindler-Koordinaten und Beschleunigte Beobachter)*

Wir betrachten die Kartenabbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon H &\to M \\ x = (x^0, x^1, \dots, x^n)^T &\mapsto (y^0(x), \dots, y^n(x)) := (x^1 \sinh(x^0), x^1 \cosh(x^0), x^2, \dots, x^n)^T. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $H = \left\{ (x^0, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_1 > 0 \right\}$ einen Halbraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ und (M, g) bezeichnet die Minkowski-Raumzeit mit

$$M = \mathbb{R}^{1+n}, \quad g = (\mathrm{d}y^0)^2 - (\mathrm{d}y^1)^2 - \dots - (\mathrm{d}y^n)^2.$$

Wie üblich identifizieren wir dabei $M = T_yM = \mathbb{R}^{1+n}$ für alle $y \in M$.

a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektorfelder $\partial_{x_i} = \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x^i}$ für $i = 0, \dots, n$ und zeigen Sie, dass die auf H zurückgezogene Lorentz-Metrik durch

$$\varphi^* g = (x_1)^2 \, (\mathrm{d}x_0)^2 - (\mathrm{d}x_1)^2 - (\mathrm{d}x_2)^2 - \dots - (\mathrm{d}x_n)^2$$

gegeben ist. (Hinweis: Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix von g bezüglich ∂_{x_i})

b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole in der Karte φ.

c) Zeigen Sie, dass für einen festen Vektor $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ die Kurve

$$c\colon \mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto \varphi((x_0 + t/x_1, x_1, \dots, x_n)^T)$$

nach Bogenlänge parametrisiert ist, also $g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 1$ gilt.

Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor

$$a(t) = \nabla_{c'(t)} c'(t)$$

und zeigen Sie, dass der Betrag $\sqrt{g_{c(t)}(a(t), a(t))}$ der Beschleunigung unabhängig von t ist.

Aufgabe 2 *(Maximal symmetrische pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten)*

Viele interessante Beispiele für pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten lassen sich folgendermaßen konstruieren:
Es sei g das Standard-Pseudoskalarprodukt mit Signatur (p, q) auf $\mathbb{R}^{p+q}$ (mit $n = p + q$, siehe Aufgabe 2 auf Blatt 4). Für $a \neq 0$ betrachten wir dann die Untermannigfaltigkeit

$$M = \left\{ v \in \mathbb{R}^{p+q} \,\middle|\, g(v, v) = a \right\}.$$

a) Zeigen Sie: M ist eine $(p + q - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die an den Punkt $v \in M$ tangentiale Hyperebene von $\mathbb{R}^n$ ist parallel zur Hyperebene $\langle v \rangle^\perp$.

Daher identifizieren wir im Folgenden $T_vM = \langle v \rangle^\perp$.

b) Zeigen Sie: Schränkt man g auf die Tangentialräume T_vM ein, erhält man ein Pseudoskalarprodukt mit Signatur $(p-1,q)$, falls $a>0$ und $(p,q-1)$ falls $a<0$. (Hinweis: Ergänzen Sie v zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^{p+q}$.)

   Dies macht $(M, g|_M)$ zu einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit.

c) Zeigen Sie: M ist diffeomorph zu $S^{p-1}\times\mathbb{R}^q$ falls $a>0$ und zu $\mathbb{R}^p\times S^{q-1}$ falls $a<0$.

d) Zeigen Sie, dass die Invarianzgruppe $\mathrm{O}(p,q)$ von g auf M durch pseudoriemannsche Isometrien wirkt. (Das heißt, für jedes Element $A\in\mathrm{O}(p,q)$ und jeden Punkt $v\in M$ gilt $Av\in M$, $A(T_vM)=T_{Av}M$ und $A|_{T_vM}\colon (T_vM, g|_{T_vM})\to(T_{Av}M, g|_{T_{Av}M})$ ist eine pseudoriemannsche Isometrie.)

e) Zeigen Sie, dass M in folgendem Sinne *maximal symmetrisch* ist: Werden zwei Punkte $v_1,v_2\in M$ und eine lineare Isometrie $\phi\colon (T_{v_1}M, g|_{T_{v_1}M})\to(T_{v_2}M, g|_{T_{v_2}M})$ vorgegeben, gibt es stets eine Isometrie $A\in\mathrm{O}(p,q)$, die $Av_1=v_2$ und $A|_{T_vM}=\phi$ erfüllt.

Bemerkung: Aus der Aussage in e) folgt direkt, dass M eine konstante Schnittkrümmung hat. Aus dieser Konstruktion gewinnt man unter Anderem folgende Räume

p	q	a	M	Schnittkrümmung
$n+1$	0	1	(riemannsche) Sphäre S^n	$+1$
n	1	-1	(riemannscher) hyperbolischer Raum* $\mathbb{H}^n$	-1
1	n	<0	(lorentzscher) deSitter-Raum dS^n	$\sqrt{\lvert a^{-1}\rvert}$
2	$n-1$	>0	(lorentzscher) Anti-deSitter-Raum AdS^n	$-\sqrt{a^{-1}}$

*tatsächlich besteht M in diesem Fall aus zwei Kopien von $\mathbb{H}^n$, siehe Teilaufgabe c).

Hinweis: Formeln für Levi-Civita-Zusammenhang und Christoffelsymbole
In einer Karte mit Koordinaten $x^0,\dots x^n$ und zugehörigen Koordinatenvektorfeldern $\partial_{x^0},\dots\partial_{x^n}$ seien zwei Vektorfelder

$$V=\sum_{i=0}^n v^i\partial_{x^i},\quad W=\sum_{i=0}^n w^i\partial_{x^i}$$

gegeben. Dann gilt für die kovariante Ableitung

$$\nabla_V W=\sum_{i=0}^n u^i\partial_{x^i}\quad\text{mit}\qquad u^i=\sum_{j=0}^n v^j\left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j}+\sum_{k=0}^n\Gamma^i_{kj}w^k\right)$$

mit den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma^i_{kj}=\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^n g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right).$$

Dabei sind g^{ij} die Einträge der Inversen zur Fundamentalmatrix $g_{ij}=g(\partial_{x^i},\partial_{x^j})$, also gilt

$$\sum_{j=0}^n g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k.$$

Alle Koeffizienten $u^i, v^i, w^i, \Gamma^i_{jk}, g_{ij}, g^{ij}$ sind dabei als Funktionen der Koordinaten $x^0,\dots,x^n$ aufzufassen.

Abgabe bis Freitag, den 15.06.18 um 11:30 in der Übung.