Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 6 **14.06.18**

Definition. Die von den vier Matrizen

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

erzeugte reelle Unteralgebra $\mathbb{H}$ (nach Hamilton 1843) von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ heißt Schiefkörper der *Quaternionen.* Die Matrizen erfüllen die Relationen

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$

Alle Quaternionen lassen als Linearkombination $z = x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ mit $x_0, \dots x_3 \in \mathbb{R}$ schreiben. Die Quaternion $\bar{z} := x_0 - x_1\mathrm{i} - x_2\mathrm{j} - x_3\mathrm{k}$ heißt die *zu z konjugierte (Quaternion).* Der *Realteil* der Quaternion z ist $\mathrm{Re}(z) := x_0 = 1/2(z + \bar{z})$.

Aufgabe 1 *(Gromoll-Meyer Sphäre)*

Es sei $\mathrm{Sp}(n)$ die Gruppe der symplektischen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{H}$, d.h.

$$\mathrm{Sp}(n) = \{Q \in \mathbb{H}^{n\times n} \mid Q^*Q = QQ^* = \mathrm{Id}\},$$

wobei Q^* die transponiert konjugierte Matrix von Q bezeichnet.
$\mathrm{Sp}(1)$ ist isomorph zu $\mathrm{SU}(2)$ und damit diffeomorph zu S^3 (Siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 3 c).

a) Zeigen Sie, dass durch

$$(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)) \times \mathrm{Sp}(2) \to \mathrm{Sp}(2), \quad ((q_1, q_2), Q) \mapsto \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_1 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \overline{q}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine freie Gruppenwirkung definiert ist, deren Quotient diffeomorph zu S^4 ist.

b) Verwenden Sie die Diagonale $\Delta\colon S^3 \to S^3 \times S^3,\ z \mapsto (z, z)$ und die Wirkung aus dem Aufgabenteil b) um ein S^3-Bündel über der 4-Sphäre zu definieren. Der Totalraum dieses Bündels wird als *Gromoll-Meyer Sphäre* bezeichnet.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein kritischer Punkt $p \in M$ einer glatten Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, i.e. $\mathrm{D}_p f = 0$ heißt *nicht ausgeartet*, falls $\det \mathrm{Hess}_p(f) \neq 0$ gilt.

Satz von Reeb. Es sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit genau zwei nicht ausgearteten kritischen Punkten. Dann ist M homöomorph zur n-Sphäre.

Aufgabe 2 *(Homöomorphietyp von Sphären)*

Es seien mit N und S der Nord- bzw. Südpol der S^4 bezeichnet, die durch $U_1 := S^4 \setminus \{S\}$ und $U_2 := S^4 \setminus \{N\}$ überdeckt wird. Es seien durch stereographische Projektion Karten

$$\phi_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H} \quad \text{und} \quad \phi_2\colon U_2 \to \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$$

gewählt, sodass der Kartenwechsel $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\colon \mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{H} \setminus \{0\}$ durch $u \mapsto \frac{1}{u}$ gegeben ist. Wie in der Vorlesung erklärt, wird für $k, l \in \mathbb{Z}$ und die Übergangsfunktion

$$f_{k,l}\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \times S^3 \to \phi_2(U_1 \cap U_2) \times S^3, \quad (u, x) \mapsto \left(\frac{1}{u}, \frac{u^k x u^l}{\|u\|^{k+l}}\right)$$

ein S^3-Bündel $S^3 \to M_{k,l} \to S^4$ über der 4-Sphäre definiert.

a) Es gelte $k + l = -1$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall durch

$$\phi_1(U_1) \times S^3 \to \mathbb{R}, \quad (u, x) \mapsto \frac{\mathrm{Re}(x)}{\sqrt{1 + \|u\|^2}}$$

$$\phi_2(U_2) \times S^3 \to \mathbb{R}, \quad (v, y) \mapsto \frac{\mathrm{Re}(vy^{-1})}{\sqrt{1 + \|vy^{-1}\|^2}},$$

wobei $S^3 \subset \mathbb{H}$ als Einheitsquaternionen aufgefasst werden, eine wohldefinierte glatte Funktion $f\colon M_{k,l} \to \mathbb{R}$ definiert wird.

b) Verwenden Sie den Satz von Reeb um zeigen, dass $M_{k,l}$ für $k + l = -1$ homöomorph zu einer 7-Sphäre ist.

Abgabe bis Freitag, den 22.06.18 um 11:30 in der Übung.