Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 7 **22.06.18**

Definition: Es seien X, Y topologische Räume und $U \subset X, V \subset Y$ Teilmengen.
Die Notation $f\colon (X,U) \to (Y,V)$ soll bedeuten, dass $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung mit $f(U) \subset V$ ist.

Definition/Lemma: Eine *(relative) Homotopie* zwischen zwei Abbildungen $f_0, f_1\colon (X,U) \to (Y,V)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \times [0,1] \to Y$ mit

$$f(x,0) = f_0(x), \quad f(x,1) = f_1(x), \quad f(u,t) \in V$$

für alle $x \in X$, $u \in U$, $t \in [0,1]$. Existiert eine solche Homotopie, schreibt man $f_0 \sim f_1$ und sagt, f_0 und f_1 seien zueinander *homotop.*
$\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $(X,U) \to (Y,V)$.
Für die Komposition homotoper Abbildungen $f_0 \sim f_1$ und $g_0 \sim g_1$ gilt $f_0 \circ g_0 \sim f_1 \circ g_1$.

Definition: Es sei (X, x_0) ein topologischer Raum mit Basispunkt $x_0 \in X$. Für eine ganze Zahl $n \geq 1$ wird die Menge

$$\pi_n(X,x_0) := \left\{ f\colon \big([0,1]^n, \partial([0,1]^n)\big) \to (X, \{x_0\}) \right\} \Big/ \sim$$

mit dem Neutralelement

$$0 = [\mathfrak{o}] \quad \text{mit} \quad \mathfrak{o}\colon [0,1]^n \to X, \quad v \mapsto x_0$$

und der Verknüpfung

$$[f] + [g] = [f+g] \quad \text{mit} \quad (f+g)(v_1, \dots v_n) = \begin{cases} f(2v_1, v_2, \dots v_n) & , v_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2v_1 - 1, v_2, \dots v_n) & , v_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

zu einer Gruppe, der *n-ten Homotopiegruppe.* $\pi_1(X,x_0)$ wird auch *Fundamentalgruppe* genannt.
Für $n \geq 2$ ist $\pi_n(X, x_0)$ eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 1 *(Gruppenstruktur von π_n)*

Es sei (X, x_0) und $n \geq 0$ wie oben. Weiterhin seien f, g, h Repräsentanten von Homotopieklassen in $\pi_n(X, x_0)$.

a) Zeigen Sie, dass die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $\mathfrak{o}$ tatsächich das Neutralelement ist, indem Sie eine Homotopie von $f + \mathfrak{o}$ nach f angeben.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $-f\colon [0,1]^n \to X, (v_1, \dots, v_n) \mapsto f(1 - v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein inverses Element $-[f] := [-f]$ definiert, also $f + (-f) \sim \mathfrak{o}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $(f+g)+h \neq f+(g+h)$, aber $(f+g)+h \sim f+(g+h)$ gilt. Damit ist die Verknüpfung auf $\pi_n(X, x_0)$ assoziativ.

Aufgabe 2 *(Homotopiegruppen von Sphären)*

Es sei x_0 der "Nordpol" der (orientierten) n-Sphäre S^n. In dieser Aufgabe sind nur anschauliche Begründungen gefragt, keine kompletten Beweise.

a) Sei $n = 1$. Wir ordnen einer Funktion $f\colon [0,1] \to S^1$ eine *Windungszahl* $\varphi(f) \in \mathbb{Z}$ zu, die angibt, wie oft $f(t)$ den Punkt x_0 in positiver Richtung überschreitet, während t von 0 nach 1 ansteigt. Überschreitungen in negativer Richtung werden negativ gezählt. Begründen Sie, dass $\varphi(f)$ nur von der Homotopieklasse von f abhängt und einen Gruppenisomorphismus $\varphi\colon \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ induziert.

b) Sei nun $n, k \geq 1$. Begründen Sie, dass ein nicht surjektiver Repräsentant f einer Homotopieklasse $[f] \in \pi_k(S^n, x_0)$ homotop zur konstanten Abbildung $\mathfrak{o}$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der "Südpol" von S^n nicht in Bild(f) enthalten.

c) Angenommen, die Funktion $f\colon [0,1]^n \to S^n$ ist ein Repräsentant einer Homotopieklasse in $\pi_n(S^n)$, sodass um jedes Urbild des Südpoles eine Umgebung $U \subset [0,1]^n$ existiert, für die $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Der *Topologische Grad* $\varphi(f)$ von f zählt die Urbilder des Südpols, und zwar positiv, falls $f|_U$ orientierungserhaltend ist und negativ, falls $f|_U$ die Orientierung umkehrt.

Sie dürfen diesmal ohne Beweis verwenden, dass φ eine wohldefinierte, injektive Abbildung $\varphi\colon \pi_n(S^n, x_0) \to \mathbb{Z}$ induziert. Zeigen Sie, dass dies ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 3 *(Cliffordalgebren)*

Es sei C_n die von den Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ erzeugte reelle Cliffordalgebra. In dieser gelten die Identitäten $e_i^2 = -1$ und $e_i e_j = -e_j e_i$ für $i \neq j$.
Wir identifizieren $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ mit dem von 1 bzw. $e_1, \ldots, e_n$ erzeugten Untervektorraum von C_n.

a) Zeigen Sie, dass die Dimension von C_n als reeller Vektorraum 2^n ist, geben Sie eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass es Elemente $z \in C_n$ gibt, die $z^2 \notin \mathbb{R}$ erfüllen.

c) Zeigen Sie, dass das Standardskalarprodukt von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n \subset C_n$ durch $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(vw + wv)$ gegeben ist.

d) Zeigen Sie, dass für einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n \subset C_n$ die Konjugationsabbildung

$$\iota_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \subset C_n, \quad w \mapsto vwv$$

eine orthogonale Abbildung ist, nämlich die Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene.

e) Zeigen Sie, dass C_2 isomorph zur Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ ist.

f) Zeigen Sie, dass das Element $\omega = e_1 e_2 e_3 \in C_3$ die Gleichung $\omega^2 = 1$ erfüllt und im Zentrum von C_3 liegt, also $z\omega = \omega z$ für alle $z \in C_3$ erfüllt.

g) Zeigen Sie, dass C_3 isomorph zur Algebra $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie die Eigenräume des Vektorraumisomorphismus $L_\omega\colon C_3 \to C_3, z \mapsto \omega z$)

Abgabe bis Freitag, den 29.06.18 um 11:30 in der Übung.