Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 8 **28.06.18**

Satz Sei $0 \leq k < n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\pi_k(S^n) = 0$. Die Gruppe $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ wird von der Homotopieklasse $[\mathrm{id}_{S^n}]$ erzeugt. (Siehe auch Übungsblatt 7)

Definition/Lemma Jede stetige Abbildung $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert eine Abbildung

$$\varphi_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0), \qquad [f] \mapsto \varphi_*([f]) := [\varphi \circ f].$$

Für $n \geq 1$ ist φ_* ein Gruppenhomomorphismus.

Satz Sei $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} B$ ein Faserbündel, dessen Totalraum E, Faser F und Grundraum B Mannigfaltigkeiten sind, und $x_0 \in F \subset E$, $y_0 = \pi(x_0) \in B$ feste Punkte darin. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \ldots \xrightarrow{\pi_*} \pi_{n+1}(B, y_0) \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(B, y_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \ldots \\ \ldots \xrightarrow{\pi_*} \quad \pi_1(B, y_0) \longrightarrow \pi_0(F, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_0(E, x_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_0(B, y_0) \end{aligned}$$

die sog. *lange exakte Homotopiesequenz.*
Das bedeutet, das Bild jeder Abbildung ist der Kern der darauf folgenden Abbildung (also das Urbild der Homotopieklasse der konstanten Abbildung). Überall wo Gruppenstrukturen definiert sind (also auf allen π_n mit $n \geq 1$), sind die Abbildungen Gruppenhomomorphismen.

Aufgabe 1 *($\mathbb{R}P^\infty$ als klassifizierender Raum)*

Die Inklusion $S^n \subset S^{n+1}$ einer n-Sphäre als „Äquator“ der $(n+1)$-Sphäre induziert eine Inklusion der projektiven Räume $\mathbb{R}P^n = S^n \big/ \{-1, 1\} \subset S^{n+1} \big/ \{-1, 1\} = \mathbb{R}P^{n+1}$.
Wir definieren nun

$$S^\infty := \varinjlim S^n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n \qquad \qquad \mathbb{R}P^\infty := \varinjlim \mathbb{R}P^n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}P^n$$

a) Zeigen Sie: $S^\infty \cong \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^k x_i^2 = 1 \right\}$

   und $\mathbb{R}P^\infty \cong S^\infty \big/ \{-1, 1\}$

b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$f_0 := \mathrm{id}_{S^\infty}, \qquad \begin{aligned} f_1\colon S^\infty &\to S^\infty, \\ (x_1, x_2, \ldots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \ldots) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2\colon S^\infty &\to S^\infty \\ x &\mapsto (1, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

   homotop sind, indem Sie eine Homotopie von f_0 nach f_1 und eine von f_1 nach f_2 konstruieren. Daraus folgt, dass S^∞ kontrahierbar ist und nur triviale Homotopiegruppen hat.

c) Zeigen Sie mit der langen exakten Homotopiesequenz des Faserbündels

$$\mathbb{Z}_2 \cong \{-1, 1\} \to S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty,$$

dass $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) \cong \mathbb{Z}_2$ gilt und alle anderen Homotopiegruppen von $\mathbb{R}P^\infty$ trivial sind.

Alles zusammen bedeutet, dass $\mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$ der klassifizierende Raum von $\mathbb{Z}_2$ ist.

Aufgabe 2 *(Höhere Homotopiegruppen von Sphären)*

a) Zeigen Sie, dass $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und $\pi_n(S^1) = 0$ für $n \geq 2$ gilt, indem Sie die lange exakte Sequenz der Überlagerung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ nutzen.

b) Nutzen Sie die Existenz der Hopf-Faserung $S^1 \to S^3 \to S^2$, um zu zeigen, dass $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3)$ für $n \geq 3$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Homotopieklasse $[\pi]$ der Projektion $\pi\colon S^3 \to S^2$ der Hopf-Faserung die Gruppe $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt.

Aufgabe 3 *(Stabilität der Homotopiegruppen von* $\mathrm{O}(n)$*)*

a) Benutzen Sie die lange exakte Homotopiesequenz des Prinzipalbündels $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n+1) \to S^n$ um zu zeigen, dass $\pi_k(\mathrm{O}(n)) \cong \pi_k(\mathrm{O}(n+1))$ isomorph sind, falls $n > k+1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass der von der Inklusion $\iota\colon \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(\infty) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O(n)$ induzierte Homomorphismus $\iota_*\colon \pi_k(\mathrm{O}(n)) \to \pi_k(\mathrm{O}(\infty))$ ein Isomorphismus ist, falls $n > k+1$ gilt.

In diesem Sinne gilt also $\pi_k(\mathrm{O}(\infty)) = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_k(\mathrm{O}(n))$.

Abgabe bis Freitag, den 06.07.18 um 11:30 in der Übung.