Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 9 **05.07.18**

Definition Eine glatte Abbildung $\pi\colon E \to B$ zwischen zwei riemannschen Mannigfaltigkeiten E, B heißt *Submersion*, falls die Differentialabbildung $\mathrm{d}\pi_p\colon T_pE \to T_pM$ für jeden Punkt $p \in E$ surjektiv ist. Sie heißt *riemannsche Submersion*, falls zusätzlich $\mathrm{d}\pi_p|_{\mathrm{Kern}(\mathrm{d}\pi_p)^\perp}$ für jeden Punkt $p \in E$ eine lineare Isometrie ist.
Ein Vektor $v \in T_pE$ heißt *horizontal (bzgl. π)*, falls $v \in \mathrm{Kern}(\mathrm{d}\pi_p)^\perp$ und *vertikal*, falls $v \in \mathrm{Kern}(\mathrm{d}\pi_p) = T$.

Satz Ist $\pi\colon E \to B$ eine riemannsche Submersion zwischen zwei riemannschen Mannigfaltigkeiten E, B und sind X, Y zwei horizontale orthonormale Vektorfelder, dann gilt

$$\sec_B(\mathrm{d}\pi(X), \mathrm{d}\pi(Y)) = \sec_E(X, Y) + \frac{3}{4}\left\|[X, Y]^V\right\|^2 \qquad \textit{(O'Neill-Formel)}$$

wobei $\sec_B$ bzw. $\sec_E$ die Schnittkrümmung in B bzw. E bezeichnet und $[X, Y]^V$ die Orthogonalprojektion der Lie-Klammer $[X, Y]$ auf $\mathrm{Kern}(\mathrm{d}\pi_p)$ sei.

Aufgabe 1 *(Allgemeines zu Submersionen)*

a) Zeigen Sie: Eine Submersion $\pi\colon E \to B$ ist genau dann eine riemannsche Submersion, wenn für alle glatten Kurven $c\colon [a, b] \to E$ die Ungleichung $L(c) \le L(\pi \circ c)$ gilt, und $L(c) = L(\pi \circ c)$, falls $c'(t)$ horizontal für alle $t \in [a, b]$ ist.

   Was folgt daraus für die induzierten Längenmetriken auf E und B?

b) Es sei $\pi : E \to B$ eine riemannsche Submersion und $\gamma\colon [a, b] \to E$ eine Geodätische in E, sodass $\gamma'(a)$ horizontal ist. Zeigen Sie: Dann ist $\gamma'(t)$ horizontal für alle $t \in [a, b]$ und $\pi \circ \gamma$ ist eine Geodätische in B.

c) Es sei E eine riemannsche Mannigfaltigkeit, M eine Mannigfaltigkeit und $\pi\colon E \to B$ eine Submersion. Zeigen Sie, dass es höchstens eine riemannsche Metrik auf B gibt, sodass π eine riemannsche Submersion ist.

d) Es sei $G \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} B = {}^{G}/_{M}$ ein Prinzipalbündel (Siehe Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2), sodass G durch Isometrien auf der riemannschen Mannigfaltigkeit E wirkt. Zeigen Sie, dass es dann genau eine riemannsche Metrik auf B gibt, für die π eine riemannsche Submersion ist, nämlich die Quotientenmetrik auf B.

Aufgabe 2 *(Fubini-Study Metrik auf $\mathbb{C}P^n$)*

In dieser Aufgabe betrachten wir S^{2n+1} als Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{2n+2}$ mit Standardskalarprodukt. Die von der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \cdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe $S^1 := \{ \cos(\phi)I_{2n+2} + \sin(\phi)J \mid \phi \in [0, 2\pi] \}$ von $\mathrm{O}(2n+2)$ ist diffeomorph zu S^1 und wirkt isometrisch und frei auf S^{2n+1}.

Aus dieser Gruppenwirkung erhalten wir die Hopf-Faserung $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n = S^{2n+1} \big/ S^1$ (vgl. Aufgabe 2b von Übungsblatt 2).

Die Tangentialräume an die Sphäre sind wie in Aufgabe 2 von Blatt 5 durch

$$T_pS^{2n+1} := \langle p \rangle^\perp \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $p \in S^{2n+1}$ der Vektor $Jp \in T_pS^{2n+1}$ vertikal ist.

b) Es sei $A \in \mathrm{O}(2n+2)$ eine antisymmetrische orthogonale Matrix (also $A^{-1} = A^T = -A$). Zeigen Sie, dass dann

$$V_A \colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}, \quad p \mapsto Ap$$

ein Einheitsvektorfeld definiert, also $Ap \in T_pS^{2n+1}$ und $\langle Ap, Ap \rangle = 1$ für alle $p \in S^{2n+1}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass zwei solche Vektorfelder V_A, V_B genau dann orthogonal zueinander sind, wenn die Matrix AB ebenfalls antisymmetrisch ist.

d) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Lie-Klammer dieser Vektorfelder durch

$$[V_A, V_B] = -(V_{AB} - V_{BA}) = -2V_{AB}$$

gegeben ist und $[V_A, V_B]$ orthogonal zu V_A und V_B ist.

e) Bezüglich der sog. *Fubini-Study-Metrik* auf $\mathbb{C}P^n$ ist die Bündelprojektion $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ eine riemannsche Submersion. Zeigen Sie, dass mit dieser Metrik $1 \leq \sec_{\mathbb{C}P^n} \leq 4$ und $\sec_{\mathbb{C}P^1} \equiv 4$ gilt. (Hinweis: Die Schnittkrümmung einer Sphäre ist konstant 1.)

Bemerkung: Bei vielen Autoren unterscheidet sich die Definition der Fubini-Study-Metrik von der hier gegebenen um einen Faktor 2, sodass $\frac{1}{4} \leq \sec_{\mathbb{C}P^n} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 3 *($\mathbb{C}P^n$ ist nicht konstant gekrümmt)*

a) Benutzen Sie die lange exakte Homotopiesequenz der Hopf-Faserung $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, um zu zeigen, dass $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$ für alle $n \geq 1$ und $\mathbb{C}P^n \not\cong S^{2n}$ für $n \geq 2$ gilt.

b) Zeigen Sie ohne Rückgriff auf Aufgabe 2, dass $\mathbb{C}P^n$ keine konstante Krümmung haben kann.

Sie dürfen dafür den Satz von Killing-Hopf verwenden: Die universelle Überlagerung einer Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung ist S^n, $\mathbb{H}^n$ oder $\mathbb{R}^n$.

Abgabe bis Freitag, den 13.07.18 um 11:30 in der Übung.